Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann
Abgabe am 24.11.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 6

1. Aufgabe (4 Punkte).

Seien (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) symplektische Mannigfaltigkeiten. Seien $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, $i = 1, 2$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor. Weiter sei $f\colon M_1 \to M_2$ eine glatte Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass $\omega_W := \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$ eine symplektische Form auf $W := M_1 \times M_2$ ist.

b) Wir betrachten den Graph von f,
$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x,y) \in W \mid y = f(x)\} \subset W.$$
Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $\mathrm{Graph}(f)$ in $(x,y) \in \mathrm{Graph}(f)$ gegeben ist durch
$$T_{(x,y)}\mathrm{Graph}(f) = \{(v, df|_x v) \mid v \in T_x M_1\} \subset T_x M_1 \times T_y M_2 = T_{(x,y)} W.$$
Hinweis: Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden: Ist $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so ist der Graph von f eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ und die Abbildung $\mathrm{id} \times f\colon M \to M \times N$, $x \mapsto (x, f(x))$, ist ein Diffeomorphismus auf den Graphen von f.

c) Folgern Sie, dass die Abbildung $f : M_1 \to M_2$ symplektisch ist, genau dann, wenn der Graph von f eine isotrope Untermannigfaltigkeit von W ist.[1]

2. Aufgabe: Die symplektische Gruppe (4 Punkte).

Die symplektische Standardform ist die nicht-entartete alternierende bilineare Abbildung
$$\omega_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad \omega_{\mathrm{st}}(X,Y) := g_{\mathrm{st}}(JX, Y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$
wobei g_{st} das euklidische (Standard-)Skalarprodukt bezeichne. Wir definieren
$$\mathrm{Symp}(2n) := \{\psi \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n} : \omega_{\mathrm{st}}(\psi X, \psi Y) = \omega_{\mathrm{st}}(X,Y)\}.$$
Wir definieren $f(\psi) := \psi^T J \psi - J$ und $\mathfrak{so}(2n) := \{A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$. Zeigen Sie

a) $\mathrm{Symp}(2n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$,

b) $\psi \in \mathrm{Symp}(2n)$ genau dann, wenn $f(\psi) = 0$,

c) $f(\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{so}(2n)$ und $f : \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(2n)$ ist eine Submersion (d.h. $df|_\psi \colon \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)} \to \mathfrak{so}(2n)$ ist surjektiv für alle $\psi \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$),

d) $\mathrm{Symp}(2n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$. Bestimmen Sie die Dimension.

---

[1] Ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltgikeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, so heißt N *isotrop*, falls für jedes $x \in N$ der Untervektorraum $T_x N \subset T_x M$ ein isotroper Untervektorraum von $(T_x M, \omega_x)$ ist.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V wie in der zweiten Aufgabe des ersten Übungsblatts. Zeigen Sie

a) $\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i^* \wedge v_i^*$,

b) $\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n\text{-mal}} = n!\, u_1^* \wedge v_1^* \wedge \ldots \wedge u_n^* \wedge v_n^*$.

Folgern Sie daraus

c) $\omega^n \neq 0$.

d) Ist $\psi \in \mathrm{Symp}(2n)$, so gilt $\det(\psi) = 1$.