Übungsblatt 7

1. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten die 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und definieren

$$\omega_x(v, w) := \langle x, v \times w \rangle$$

für $v, w \in T_x S^2$, $x \in S^2$.

a) Zeigen Sie, dass (S^2, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit ist.

b) Stellen Sie ω in der orientierten Karte

$$F \colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2, \qquad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

dar und folgern Sie, dass ω die Volumenform von S^2 ist.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine $2n$-dimensonale symplektische Mannigfaltigkeit, $M \neq \varnothing$.

a) Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

Da ω geschlossen ist, definiert ω eine Kohomologieklasse $a := [\omega] \in H^2_{dR}(M)$ in der de Rham-Kohomologie.

b) Nun sei M geschlossen (d.h. kompakt und randlos). Zeigen Sie, dass $a^n := a \cup \dots \cup a := [\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n\text{-mal}}] \in H^{2n}_{dR}(M) \setminus \{0\}$.
Hinweis: Ein Integralsatz könnte hilfreich sein.

c) Folgern Sie $a \in H^2_{dR}(M) \setminus \{0\}$.

Hinweis: Das für diese Aufgabe nötige Wissen über Differentialformen können Sie sich, falls notwendig, noch einmal mit Hilfe des Analysis IV Skripts von Prof. Garcke vergegenwärtigen.
Bemerkung: Es gilt, dass $H^2_{dR}(S^{2k}) = 0$ für $k > 1$. Damit folgt aus c), dass S^{2k} für $k > 1$ keine symplektische Mannigfaltigkeit sein kann.

3. Aufgabe: Minimalflächeneigenschaft holomorpher Kurven (4 Punkte).

Wir betrachten $\mathbb{R}^{2n}$ mit der symplektischen Standardform $\omega := \omega_{std}$. Weiter sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Zeigen Sie:

a) Für alle $X, Y \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, gilt

$$\omega(X,Y)^2 \leq \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn X und Y $\mathbb{C}$-linear abhängig sind. Hierbei bezeichnet $\langle .,.\rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^{2n}$.
Hinweis: Für den Beweis kann es hilfreich sein, wenn Sie mit dem Standardskalarprodukt $\langle .,.\rangle_{\mathbb{C}}$ *auf* $\mathbb{C}^n$ *arbeiten, wobei* $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{C}} := X^T\overline{Y}$ *und* $\overline{Y}$ *komponentenweise zu verstehen ist. Es gilt dann etwa* $\mathrm{Re}\langle X, Y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle X, Y\rangle$.

b) Ist $F\colon \overline{G} \to \mathbb{C}^n$ eine glatte Abbildung[1], dann gilt die folgende *Wirtinger-Ungleichung*

$$\int_G F^*\omega \leq \mathrm{area}(F(G)) := \int_G \sqrt{\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\rangle^2}\, d(x,y).$$

Gleichheit gilt, falls F holomorph auf G ist.

c) Sei $F_0\colon \overline{G} \to \mathbb{C}^n$ glatt und $F_0\colon G \to \mathbb{C}^n$ holomorph. Dann gilt

$$\mathrm{area}(F_1(G)) \geq \mathrm{area}(F_0(G))$$

für alle glatten $F_1\colon \overline{G} \to \mathbb{C}^n$ die homotop zu F_0 mit festem Rand sind, d.h. es existiert eine glatte Abbildung $H\colon \overline{G} \times [0,1] \to M$ mit $H(0,.) = F_0$, $H(1,.) = F_1$ und $H(t,.)|_{\partial G} = F_0|_{\partial G}$ für alle $t \in [0,1]$.
Hinweis: Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass unter diesen Voraussetzungen $\int_G F_0^*\omega = \int_G F_1^*\omega$ *gilt. (Dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Stokes für Gebiete mit nicht glattem Rand angewendet auf* $\overline{G} \times [0,1]$ *und* $H^*\omega$*.)*

[1] $\overline{G}$ ist der Abschluss von G, nicht das komplex-konjugierte zu G