Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann
Abgabe am 08.12.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 8

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V,ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $L \subset V$ ein Lagrangescher Untervektorraum.

a) Sei $(u_1,\dots,u_n)$ eine Basis von L. Zeigen Sie: Es existieren Vektoren $v_1,\dots,v_n \in V$, so dass $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$ eine symplektische Basis von (V,ω) ist (d.h. eine Basis wie in der zweiten Aufgabe des ersten Übungsblattes).
Hinweis: Beginnen Sie damit, $v_1 \in (\mathrm{span}(u_2,\dots,u_n))^{\perp_\omega}$ passend zu wählen.

b) Zeigen Sie als Anwednung von a): jeder Lagrangesche Untervektorraum L von V besitzt ein Lagrangesches Komplement, d.h. einen Lagrangeschen Unterraum C mit $V = L \oplus C$.

c) (Bonusaufgabe): Ist J eine mit ω kompatible komplexe Struktur auf V, so ist $J(L)$ ein Lagrangesches Komplement von L.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F\colon B_1(0) \to \mathbb{C}P^1, \qquad z \mapsto [z : \sqrt{1-\|z\|^2}]$$

symplektisch ist. Dabei versehen wir $B_1(0)$ mit der symplektischen Form ω, welche durch Einschränkung der symplektischen Standardform von $\mathbb{R}^2$ entsteht und auf $\mathbb{C}P^1$ haben wir die Fubini-Study-Form ω_{FS}.
Hinweis: Es könnte hilfreich sein, F zu einem kommutativen Dreieck über $\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ zu ergänzen und mit $\hat{\omega}_{\mathrm{FS}}$ zu rechnen.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$F\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}, \qquad z \mapsto \|z\|^2.$$

a) Zeigen Sie $dF|_z = \sum_{j=1}^m \left(\overline{z}^j dz^j + z^j d\overline{z}^j\right)$.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, wenn Sie die Formel für das Differential in Koordinaten nutzen: $dF = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial F}{\partial y^j} dy^j\right)$, wobei wir die Karte

$$\mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m}, \qquad z \mapsto (x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^m),$$

$x^j := \mathrm{Re}(z^j)$, $y^j := \mathrm{Im}(z^j)$, *verwenden.*

Nun sei $\alpha \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\alpha := \frac{i}{2\|z\|^2} \sum_{j=0}^{n} z^j \, d\bar{z}^j.$$

b) Zeigen Sie $\hat{\omega}_{\mathrm{FS}} = d\alpha$.
Hinweis: Aufgabenteil a) kann hilfreich sein.
Hinweis: Das äußere Differential von komplexwertigen Formen, oder allgemeiner von vektorraumwertigen Formen, ist analog zum gewöhnlichen äußeren Differential definiert. Bei Bedarf können Sie dies etwa unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Vector-valued_differential_form` *nachlesen.*

c) Folgern Sie, dass ω_{FS} geschlossen ist.