Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 15.12.2017 bis 12:00 Uhr bei Frau Bonn in M217.

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltkeit und $f: M \to \mathbb{R}$ glatt. Weiter sei $X := \operatorname{sgrad} f$ der symplektische Gradient von f. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}_X \omega = 0.$$

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (V, ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Sei $L \subset V$ ein Lagrangescher Untervektorraum und C ein Lagrangesches Komplement von L in V. Für ein beliebiges $\alpha \in L^*$ definieren wir $\tilde{\alpha} \in V^*$ durch $\tilde{\alpha}(\ell \oplus c) := \alpha(\ell)$ für alle $\ell \in L$, $c \in C$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $\alpha \in L^*$ gilt, dass $\Omega^{-1}\tilde{\alpha} \in C$.

b) Die Abbildung

$$F: L \times L^* \to V,$$
$$(\ell, \alpha) \mapsto \ell - \Omega^{-1}\tilde{\alpha},$$

ist ein symplektischer Isomorphismus. Dabei ist $\Omega: V \to V^*$ der Isomorphismus $\Omega(v) := \omega(v, .)$. Weiter haben wir auf $L \times L^*$ die symplektische Standardform (siehe Vorlesung, erstes Beispiel in Kapitel II.1.).

3. Aufgabe (4 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $U(n+1)$ auf $\mathbb{C}P^n$, gegeben durch,

$$A \cdot [z] := [Az]$$

für alle $A \in U(n+1)$ und $[z] \in \mathbb{C}P^n$ wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Vertreters von $[z]$ ist.

Nun betrachten wir die Abbildung

$$f: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad z \mapsto \log \|z\|^2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}\frac{i}{2}\left(df|_z(X) + i df|_z(iX)\right) = \alpha|_z(X) \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $X \in \mathbb{C}^{n+1}$. Dabei ist $\alpha \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ wie in der dritten Aufgabe von Blatt 8 definiert.
Bemerkung: Gleichung (1) *besagt, dass* α *der komplex antilineare Anteil von* $\frac{i}{2} d \log \|z\|^2$ *ist.*

c) Folgern Sie, dass α invariant unter $U(n+1)$ ist.[1]

d) Folgern Sie, dass $d\alpha$ invariant unter $U(n+1)$ ist.

e) Folgern Sie, dass ω_{FS} invariant unter $U(n+1)$ ist.

[1] Es wirke die Liegruppe G glatt (von links) auf der Mannigfaltigkeit M. Für jedes $g \in G$ definieren wir $f_g\colon M \to M$ durch $f_g(x) := g \cdot x$ für alle $x \in M$. Wir sagen $\eta \in \Omega^k(M)$ *ist invariant unter* G, falls $(f_g)^*\eta = \eta$ für alle $g \in G$.