Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann
Abgabe am 22.12.2017 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

1. Aufgabe (4 Punkte).

Wie in der Vorlesung betrachten wir die symplektische Fläche (S^2, ω) mit der symplektischen Form $\omega_x(v, w) = \langle x, v \times w \rangle$, wobei $x \in S^2$, $v, w \in T_x S^2$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Hamilton-Funktion

$$H\colon S^2 \to \mathbb{R}, \qquad x = (x^1, x^2, x^3) \mapsto a(x^3)^3 + bx^3.$$

a) Zeigen Sie, dass der Fluss des Hamiltonschen Systems gegeben ist durch

$$\Phi_t^H(x) = \Phi_t(x) = \begin{pmatrix} \cos\big((3a(x^3)^2 + b)t\big)x^1 - \sin\big((3a(x^3)^2 + b)t\big)x^2 \\ \sin\big((3a(x^3)^2 + b)t\big)x^1 + \cos\big((3a(x^3)^2 + b)t\big)x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Periodenmenge $\mathrm{Per}(S^2, \omega, H)$ in den Fällen

- $a = -1$ und $b = 3$,
- $a = -1$ und $b = 6$,
- $a = 1$ und $b = 0$,
- $a = 1$ und $b = 3$.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei Q eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die symplektische Mannigfaltigkeit $(T^*Q, \omega_{\mathrm{can}})$, wobei $\omega_{\mathrm{can}} = -d\lambda_{\mathrm{can}} = \sum_{i=1}^n d(q^i \circ \pi) \wedge dp_i$.[1] Für jedes $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir einen Diffemorphismus

$$\begin{aligned} m_\mu\colon T^*Q &\to T^*Q, \\ (x, \alpha) &\mapsto (x, \mu\alpha), \end{aligned}$$

wobei $x \in Q$, $\alpha \in T_x^*Q$. Zeigen Sie:

a) $m_\mu^* \pi^* dq^i = \pi^* dq^i$.
Hinweis: Wie verhält sich m_μ mit der Projektion $\pi\colon T^*Q \to Q$?

---

[1] Erinnerung: Dabei entstehen die q^i und p_i wie folgt: Sei $Q \supseteq U \xrightarrow{q} V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von Q. Dann ist

$$\begin{gathered} T^*Q \supseteq T^*U \xrightarrow{(q\circ\pi, p)} V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq^i \mapsto ((q \circ \pi)(\alpha), \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{:=p(\alpha)}) \end{gathered}$$

eine Karte von T^*Q.

b) $m_\mu^* p_i = \mu p_i$.

c) $m_\mu^* \omega_{\mathrm{can}} = \mu \omega_{\mathrm{can}}$.

d) $\mathrm{vol}_{\frac{1}{n!}\omega_{\mathrm{can}}^n}(T^*Q) = \infty$.
Hinweis: Sie dürfen die Diffeomorphismeninvarianz des Integrals von Formen verwenden.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Wir definieren den reell projektiven Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ als die Menge der reellen Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der reell projektive Raum ist eine n-dimensonale Mannigfaltigkeit und die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^n &\to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \\ [x] &\mapsto [x], \end{aligned}$$

ist eine Einbettung.[2] Weiter ist die Projektionsabbildung $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, $\pi(x) := [x]$, eine surjektive Submersion.

Zeigen Sie:

a) $\hat{\omega}_{\mathrm{FS}}|_x(V, W) = 0$ für alle $V, W \in \mathbb{R}^{n+1}$ und alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, dass $\hat{\omega}_{\mathrm{FS}} = -\mathrm{Im}(\hat{g}_{\mathrm{FS}})$ *gilt.*

b) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit.

c) Es gibt eine Tubenumgebung U von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, eine Tubenumbgebung V des Nullschnitts von $T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ und einen Symplektomorphismus $\varphi\colon (U, \omega_{\mathrm{FS}}) \to (V, \omega_{\mathrm{can}})$ mit $\varphi|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *eine geschlossene Untermannigfaltigkeit ist.*

d) Es existiert kein Symplektomorphismus $\psi\colon (\mathbb{C}\mathrm{P}^n, \omega_{\mathrm{FS}}) \to (T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \omega_{\mathrm{can}})$.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie die 2. Aufgabe.

[2] Insbesondere bedeutet das, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist.