Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik

Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann

Abgabe am 19.01.2018 bis 12:00 Uhr bei Frau Bonn in M217.

Übungsblatt 12

1. Aufgabe (4 Punkte).

Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\{F, G\}|_x := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j \frac{\partial F}{\partial x_i}\bigg|_x \frac{\partial G}{\partial x_j}\bigg|_x$$

für $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, eine Poisson-Struktur auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

2. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $L \subset M$ eine geschlossene Lagrangesche Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $Y \in \Gamma(TL)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $H\colon M \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\begin{aligned} H(x) &= 0, \\ X_H(x) &= Y(x), \end{aligned}$$

für alle $x \in L$.

Hinweis: Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Ist M eine Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit und $\alpha \in \Gamma(T^*M|_N)$[1] mit $\alpha(v) = 0$ für alle $v \in TN$, so existiert eine glatte Funktion $H\colon M \to \mathbb{R}$ mit $H|_N = 0$ und $dH|_p = \alpha|_p$ für alle $p \in N$.

3. Aufgabe (4 Punkte).

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Weiter sei B der assoziierte Poisson-Tensor, d.h. $B_x = \omega_x(\Omega_x^{-1}., \Omega_x^{-1}.)$. Sei $x \in M$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon T_x^*M \to T_xM, \qquad \alpha \mapsto B(., \alpha),$$

wobei wir $T_xM = (T_xM)^{**}$ vermöge der Abbildung $v \mapsto (\beta \mapsto \beta(v))$ identifizieren. Zeigen Sie, dass $\Omega_x^{-1} = F$.

---

[1] Dabei ist $T^*M|_N := \bigsqcup_{x \in N} T_x^*N$ ein Vektorbündel über N.