Übungen zur Symplektischen Geometrie und klassischen Mechanik
Universität Regensburg, Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Bernd Ammann / Johannes Wittmann
Abgabe am 26.01.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 13

1. Aufgabe (8 Punkte).

a) Seien M_1 und M_2 (nicht-leere) Mannigfaltigkeiten positiver Dimension, und seien $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ die Projektionen. Zeigen Sie: zu Vektorfeldern $X_1 \in \Gamma(TM_1)$ und $X_2 \in \Gamma(TM_2)$ gibt es genau ein Vektorfeld $L(X_1, X_2) \in \Gamma(T(M_1 \times M_2))$, so dass $L(X_1, X_2)$ π_1-verwandt zu X_1 und π_2-verwandt zu X_2 ist. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma(TM_1) \oplus \Gamma(TM_2) &\to \Gamma(T(M_1 \times M_2)), \\ (X_1, X_2) &\mapsto L(X_1, X_2), \end{aligned}$$

linear, injektiv, surjektiv?

b) Zeigen Sie folgende Identität für die Lie-Klammer

$$[L(X_1, X_2), L(Y_1, Y_2)] = L([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]),$$

wobei $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$.

c) Wir betrachten die wohldefinierten, graderhaltenden linearen Abbildungen $L_i \colon \Omega_*(M_i) \to \Omega_*(M_1 \times M_2)$, die gegeben sind durch

$$L_i(f_i) = f_i \circ \pi_i,$$
$$L_1(X_1) = L(X_1, 0), \qquad L_2(X_2) = L(0, X_2),$$

für $f_i \in C^\infty(M_i)$, $X_i \in \Gamma(TM_i)$, sowie

$$L_1(A) = \sum_\alpha L(X_\alpha^1, 0) \wedge \ldots \wedge L(X_\alpha^a, 0), \qquad L_2(B) = \sum_\beta L(0, Y_\beta^1) \wedge \ldots \wedge L(0, Y_\beta^b),$$

für $A = \sum_\alpha X_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge X_\alpha^a \in \Omega_a(M_1)$, $B = \sum_\beta Y_\beta^1 \wedge \ldots \wedge Y_\beta^b \in \Omega_b(M_2)$. Zeigen Sie die folgende Identität für die Schouten-Klammern

$$L_i([A_i, B_i]) = [L_i(A_i), L_i(B_i)] \tag{1}$$

für alle $A_i, B_i \in \Omega_2(M_i)$, $i = 1, 2$.
Bonusaufgabe: Zeigen Sie (1) für alle $A_i, B_i \in \Omega_*(M_i)$.

d) Sei B_i, $i = 1, 2$ ein Poisson-Tensor auf M_i, d.h. $B_i \in \Omega_2(M_i)$ mit $[B_i, B_i] = 0$, und sei $\{.,.\}_i$ die assoziierte Poisson-Struktur. Konstruieren Sie eine Poisson-Struktur $\{.,.\}$ auf $M_1 \times M_2$ mit den folgenden Eigenschaften

$$\{F_i \circ \pi_i, G_i \circ \pi_i\} = \{F_i, G_i\}_i \circ \pi_i, \qquad \{F_1 \circ \pi_1, G_2 \circ \pi_2\} = 0 \tag{2}$$

für alle $F_i, G_i \in C^\infty(M_i)$.
Hinweis: Für den Beweis der Jacobi-Identität kann es hilfreich sein mit der Schouten-Klammer zu arbeiten und zunächst $[L_1(B_1), L_2(B_2)] = 0$ zu zeigen.
Hinweis: Um (2) zu zeigen, dürfen sie ohne Beweis verwenden, dass

$$L_1(A)|_{(p_1,p_2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A|_{p_1}(\alpha_1 \circ L(.,0), \ldots, \alpha_k \circ L(.,0))$$

für $A \in \Omega_k(M_1 \times M_2)$, $\alpha_i \in T^*_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ und analog für L_2.