Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen

Keine Abgabe und Bewertung. Das Übungsblatt wird in der Übung am 10.4. besprochen.

Präsenzübungen

1. Aufgabe

Es sei $\mathcal{A}$ ein Atlas auf dem Hausdorffraum M. Dann gibt es genau einen maximalen Atlas $\mathcal{A}_{max}$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{max}$.

2. Aufgabe

(a) Sei $S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre vom Radius r im $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeige Sie S_r^n ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Konstruieren Sie einen Atlas für den reell projektiven Raum $\mathbb{R}P := \{\{x, -x\} : x \in S^n\}$.

3. Aufgabe

Zeigen, dass für die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ alle Lösungen in einer Umgebung von $(-1, 1)$ als Graph einer Funktion in x dargestellt werden können.

4. Aufgabe

(a) Sei $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik. Bestimmen Sie die induzierte Metrik auf der Sphäre S^m.

(b) Es sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_+$ eine glatte Funktion und setze

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos(\varphi) \\ f(x)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in (a, b),\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.