# Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
**Abgabe am Freitag, den 13.4. in der Vorlesung.**
**Das Übungsblatt wird in der Übung am 17.04. besprochen.**

---

## Übungsblatt 1

### 1. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen glatte Untermannigfaltigkeiten sind:

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^n + y^n + z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^3$ für $n \in \mathbb{N}$. (Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$).

### 2. Aufgabe

Sei $M$ der Rand des Einheitsquadrats in $\mathbb{R}^2$, also die Menge

$$M := \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\},\ y \in [0, 1]\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $M$ homöomorph zu $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ ist und deshalb einen maximalen Atlas / eine glatte Struktur besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass $M$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

### 3. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ eine glatte Funktion und für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$M_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

(a) Bestimmen Sie für welche $c$ die Teilmenge $M_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension von $M_c$.

(b) Zeigen Sie, dass die glatten Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$

$$X(x_1, x_2, x_3) := x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$Y(x_1, x_2, x_3) := x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

sowie der Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ sich zu glatten Vektorfeldern auf $M_1$ einschränken.

*Je Aufgabe 5 Punkte.*