Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am Freitag, den 20.4. in der Vorlesung.

Übungsblatt 2

1. Aufgabe

Seien $a, b > 0$ und bezeichne mit $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Rotationsellipsoid, welches durch die Parametrisierung

$$F\colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} a\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ a\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ b\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Berechnen Sie $g\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ und $g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$.

(b) Berechnen Sie ein Normalenfeld ν.

(c) Berechnen Sie die zum Normalenfeld dazugehörige skalare zweite Fundamentalform. Geben sie dazu $h\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $h\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ und $h\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ an.

(d) Berechnen Sie die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung des Ellipsoids.

2. Aufgabe

Betrachten Sie die Wendelfläche $W \subset \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(s) \\ \sinh(t)\sin(s) \\ s \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

3. Aufgabe

Auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ definiere das Minkowskiprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_M\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $\langle x, y\rangle_M := -x_0y_0 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Der hyperbolische Raum $(\mathcal{H}^n, g^{\mathcal{H}})$ ist der Raum $\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle_M = -1,\ x_0 > 0\}$ ausgestattet mit der Metrik $g^H(X,Y) := \langle X, Y\rangle_M$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist.
(b) Zeigen Sie, dass $g^{\mathcal{H}}$ eine Riemannsche Metrik auf $\mathcal{H}^n$ ist.
(c) Beweisen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & \cdots & & \\ \sinh t & \cosh t & \cdots & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

beschriebene Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ den Raum $\mathcal{H}^n$ auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie, dies definiert eine Isometrie.

Pro Aufgabe 5 Punkte.