

## Übungsblatt 3

### 1. Aufgabe

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $e_1, \dots, e_m$  eine Orthonormalbasis von  $T_x M$ . Seien  $K$ ,  $\text{ric}$  und  $\text{scal}$  die Schnittkrümmung, der Ricci-Tensor und die Skalar-krümmung. Zeigen Sie

$$\text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}), \quad \text{scal}(x) = \sum_{i=1}^m \text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}).$$

### 2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass die stereographische Projektion

$$S^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \left( \begin{array}{c} (\sin \vartheta)y \\ \cos \vartheta \end{array} \right) \mapsto (\cot(\vartheta/2))y, \quad \vartheta \in (0, \pi], \quad y \in S^{m-1}$$

ein konformer Diffeomorphismus ist.

### 3. Aufgabe

Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei  $R$  der Riemannsche Krümmungstensor. Relativ zur Basis  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$  haben wir

$$\sum_{l=1}^n R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} = R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor folgende Form in der lokalen Karte  $x: U \rightarrow M$  hat:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} + \sum_{s=1}^n \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} - \sum_{s=1}^n \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js}.$$

### 4. Aufgabe

Berechnen Sie Riemann-, Ricci-, Skalar- und Weyl-Krümmung von  $S^n$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^5$ ,  $\mathcal{H}^n$  und von  $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ .

*Je Aufgabe 5 Punkte.*