Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 27.04.

Übungsblatt 3

1. Aufgabe

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $e_1, \dots, e_m$ eine Orthonormalbasis von T_xM. Seien K, ric und scal die Schnittkrümmung, der Ricci-Tensor und die Skalarkrümmung. Zeigen Sie

$$\operatorname{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} K\big(\operatorname{span}\{e_i, e_j\}\big), \qquad \operatorname{scal}(x) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{m} K\big(\operatorname{span}\{e_i, e_j\}\big).$$

2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass die stereographische Projektion

$$S^m \setminus \{(0, \cdots, 0, 1)^T\} \to \mathbb{R}^m, \ \begin{pmatrix} (\sin\vartheta) y \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \mapsto (\cot(\vartheta/2))y, \ \vartheta \in (0, \pi], \ y \in S^{m-1}$$

ein konformer Diffeomorphismus ist.

3. Aufgabe

Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei R der Riemannsche Krümmungstensor. Relativ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ haben wir

$$\sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor folgende Form in der lokalen Karte $x : U \to M$ hat:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} + \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js}.$$

4. Aufgabe

Berechnen Sie Riemann-, Ricci-, Skalar- und Weyl-Krümmung von S^n, $S^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^5$, $\mathcal{H}^n$ und von $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

Je Aufgabe 5 Punkte.