Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 4.5.

Übungsblatt 4

1. Aufgabe

Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Seien $p, q, r \geq 1$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für alle messbaren Funktionen $u, v\colon M \to \mathbb{R}$:

$$\|u \cdot v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^q}.$$

ii) Es sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit beschränktem Volumen. Für $1 \leq p < q$ gilt

$$\|u\|_{L^p} \leq \mathrm{vol}(M)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|u\|_{L^q}.$$

Hier verwenden wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie den Laplace-Operator Δ^{S^n} auf der Sphäre S^n und zeigen Sie

$$\Delta^{S^n} x^1 = n x^1.$$

3. Aufgabe

Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+2}$ mit dem Minkowski-Produkt von Aufgabe 3 des zweiten Übungsblattes. Wir definieren die Abbildung $\psi\colon S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2},\ x \mapsto (1, x)$.

(a) Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller lichtartigen Vektoren ungleich 0, d.h.

$$\mathcal{L} := \{X \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\} | \langle X, X\rangle_M = 0\}.$$

Zeigen Sie $\psi(x) \in \mathcal{L}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto [\psi(x)]$ eine Bijektion von S^n nach $\mathcal{L}/\mathbb{R}^*$ definiert.

(b) Aus (a) erhalten wir eine Abbildung $\pi\colon \mathcal{L} \to S^n$. Zu $v \in T_x S^n$ definiere

$$E_{x,v} := \{Y \in \mathbb{R}^{n+2} | d\pi_{|x}(Y) \in \mathbb{R} \cdot v\}.$$

Zeigen Sie, dass $\langle X, x\rangle_M = 0$ für alle $X \in E_{x,v}$.

(c) Sind $E_1 = \mathrm{span}\{x, v\}$ und $E_2 = \mathrm{span}\{x, w\}$ Ebenen in $\mathbb{R}^{n+2}$, die einen gemeinsamen lichtartigen Vektor x enthalten, so definieren wir den Winkel

$$\cos \angle(E_1, E_2) = \frac{\langle v, w\rangle_M}{\sqrt{\langle v, v\rangle_M}\sqrt{\langle w, w\rangle_M}}.$$

Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen solchen Ebenen wohldefiniert ist und, dass $\angle(E_{x,v}, E_{x,w}) = \angle(v, w)$. Hierbei ist $\angle(v, w)$ analog definiert mit dem euklischen Skalarprodukt.

(d) Sei $A \in O(n+1,1)$, d.h. $A \in \mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$ ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$. Zeigen Sie $A(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, und zeigen Sie, es gibt einen konformen Diffeomorphismus $\widetilde{A}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{L} \arrow[d, "\pi"'] \\ S^n \arrow[r, "\widetilde{A}"] & S^n \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Je Aufgabe 5 Punkte.