Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 18.5.,
Besprechung am MITTWOCH, den 23.5.

Übungsblatt 6

1. Aufgabe

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und Y vollständig. Dann ist $f : X \to Y$ kompakt $\Leftrightarrow$ für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat die Bildfolge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

2. Aufgabe

Das Ziel der folgenden Aufgabe ist es, zu zeigen, dass der Satz von Rellich-Kondrakhov nicht auf $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ gilt. Konstruieren Sie dazu eine Folge $u_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, die in $H^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $p \in [1, \infty)$, die aber in keinem dieser Sobolev-Räume konvergiert.

3. Aufgabe

Es sei $Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$ der Einheitskubus. Sei S der Rand von Q mit der nach außen orientierten Normalen. Es sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) := (2xy, 3ye^z, x\sin(z))$. Berechnen Sie $\int_S v\, d\mathrm{vol}_S$ mittels Satz von Gauß.

Bonusaufgabe

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Bezeichne mit τ_u die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, d.h. die Nullumgebungsbasis dieser Topologie aus Mengen der Form

$$U_{K,r,k} := \{f \in C^\infty(M) : \sup_K |\partial^\alpha f| < r, |\alpha| \le k\}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $K \subset M$ kompakt, $k \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ besteht und die Operationen

$$(C^\infty(M), \tau_u) \times (C^\infty(M), \tau_u) \to (C^\infty(M), \tau_u),\ (f, g) \mapsto f + g,$$
$$(\mathbb{C}, |\cdot|) \times (C^\infty(M), \tau_u) \to (C^\infty(M), \tau_u),\ (\lambda, f) \mapsto \lambda f$$

stetig sind, d.h. die Topologie ist verträglich mit der Vektorraumstruktur von $C^\infty(M)$.

i) Überlegen Sie sich wie man $C^\infty(M)$ mit der Struktur eines topologischen Vektorraums versehen kann mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, wenn M eine beliebige C^∞-Mannigfaltigkeit ist, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

ii) Zeigen Sie $C_c^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ ist ein linearer Unterraum und mit der von τ_u induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum.

iii) Beweisen Sie, dass die Topologie τ_u vollständig metrisierbar ist, d.h. es existiert eine Metrik d auf $C^\infty(M)$, sodass die durch d erzeugte Topologie τ_d äquivalent ist zu τ_u.

iv) Es sei $\widetilde{d}$ die auf $C_c^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ von d induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass $(C_c^\infty(M), \tau_{\widetilde{d}})$ ein topologischer Vektorraum ist, aber kein vollständiger metrischer Raum ist. (*Hinweis: Satz von Baire (Analysis I).*)

v) Zeigen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf $C^\infty(M)$ gibt, sodass $(C^\infty(M), \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum ist. (*Hinweis: Satz von Montel (Analysis III).*)

Pro Aufgabe 5 Punkte.