Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen

Abgabe am 25.5.

Übungsblatt 7

1. Aufgabe

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass in lokalen Koordinaten

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

gilt, wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention nutzen.

2. Aufgabe

Sei I ein Intervall, M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \to M$ glatt. Ein Vektorfeld längs γ ist eine glatte Abbildung $X : I \to TM$ mit $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

i) Sei $\phi : U \to V$ eine Karte mit Christoffel-Symbolen $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$. Für alle $t \in \gamma^{-1}(U)$ schreiben wir unter Nutzung der Einsteinschen Summenkonvention $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_{\gamma(t)}$ und $\gamma'(t) = \tau^i(t) \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_{\gamma(t)}$. Zeigen Sie für $t_0 \in \gamma^{-1}(U)$

$$\nabla_{\gamma'(t_0)} X := \frac{dX^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_{\gamma(t_0)} + \tau^i(t_0) X^j(t_0) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0)) \frac{\partial}{\partial \phi^k}|_{\gamma(t_0)}$$

hängt nicht von der verwendeten Karte ab.

ii) Seien $a, b \in I$. Zu jedem $\eta \in T_{\gamma(a)}M$ gibt es ein eindeutiges Vektorfeld X längs γ mit $X(a) = \eta$ und $\nabla_{\gamma'(t)} X = 0$ für alle t. *Hinweis: Reduzieren Sie die Behauptung in Karten auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

iii) Für η und X wie in ii) definieren wir $P^b_a(\eta) := X(b)$. Die dadurch definierte Abbildung $P^b_a : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ heißt *Parallelverschiebung* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ längs γ. Zeigen Sie: P^b_a ist linear, bijektiv und isometrisch.

3. Aufgabe

Sei I ein Intervall, M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \to M$ glatt. Dann ist $\gamma' : I \to TM$ ein Vektorfeld längs γ. Wir sagen γ ist Geodätische, falls $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$.
Zeigen Sie: zu $p \in M$ und $X \in T_pM$ gibt es eine Geodätische $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$. Sind $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ und $\tau : (-\delta, \delta) \to M$ zwei solche Geodätische, so stimmen sie auf $(-\epsilon, \epsilon) \cap (-\delta, \delta)$ überein.
Anmerkung: Im Spezialfall, dass γ eine Kürzeste zwischen nahe beieinander liegenden Punkten $x = \gamma(a)$ und $y = \gamma(b)$ ist, stimmt P^b_a mit τ^y_x in Def. 2.50 des Skripts überein.