Übungsblatt 8

1. Aufgabe

Es sei $(M,g) := (M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$, wobei (M_i, g_i) glatte riemannsche Mannigfaltigkeiten sind und die Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ mit der Produkt-Metrik $g_1 \oplus g_2$ ausgestattet ist, die in $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ definiert ist durch

$$(g_1 \oplus g_2)_{|(p_1,p_2)}((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) := g_{1|p_1}(X_1,Y_1) + g_{2|p_2}(X_2,Y_2)$$

für alle $X_i, Y_i \in T_{p_i}M,\ i = 1,2$. Man beachte $T_{p_1,p_2}M = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

i) Seien $\gamma_i\colon [0,1] \to M_i$ Geodätische für $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass (γ_1, γ_2) eine Geodätische auf M ist.

ii) Drücken Sie den Krümmungstensor, Ricci- und Skalarkrümmung auf M in Form der Krümmungstensoren, Ricci- und Skalarkrümmungen auf M_1 und M_2 aus.

2. Aufgabe

Führen Sie den Beweis von Satz 2.54 (Sobolev'scher Einbettungssatz, 2. Teil) für $n = 2$: Ersetzen Sie dazu im Beweisschritt d) die Funktion r^{2-n} durch $\ln(r)$.

3. Aufgabe

Es sei M eine kompakte n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $w\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Bezeichne mit $\mathcal{F}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + wu^2)\, d\mathrm{vol}}{\|u\|^2_{L^p}}$$

für $u \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\}$ und $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

i) $\mathcal{F}$ is wohldefiniert, d.h. $u \in L^p$.

ii) $\inf \mathcal{F} > -\infty$.

iii) Falls $w > 0$ gilt $\inf \mathcal{F} > 0$.

iv) Es sei $2 \leq p < \frac{2n}{n-2}$, dann existiert ein u_0 mit $\mathcal{F}(u_0) = \inf \mathcal{F}$. *Hinweis: Nutzen Sie die Kompaktheit der Einbettung $H^{1,2} \hookrightarrow L^p$ in der Art, dass jede beschränkte Folge in $H^{1,2}$ eine in L^p konvergente Teilfolge besitzt. Nutzen Sie nun, dass diese Folge eine in $H^{1,2}$ schwach konvergente Teilfolge besitzt.*

4. Aufgabe

Seien M und $\mathcal{F}$ wie in Aufgabe 3 für $p \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$. Zeigen Sie, dass für $u \in C^\infty(M)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Für alle $v \in C^\infty(M)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u + tv) = 0\,.$$

(2) Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\Delta u + wu = c|u|^{p-2}u\,.$$

Falls eine der (und damit beide) Bedingungen erfüllt sind, so bestimmen Sie bitte die Konstante c als Ausdruck in $\mathcal{F}(u)$ und $\|u\|_{L^p}$.