Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 8.6.

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Sei (M, g) eine glatte riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für alle Vektorfelder X, Y auf M die Symmetrieeigenschaft für die Hesse'sche gilt:

$$\nabla^2_{X,Y} u = \nabla^2_{Y,X} u, \;\; u \in C^\infty(M).$$

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine glatte riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der Laplace-Operator. Beweisen Sie folgende Identitäten:

i)

$$\Delta(f\widetilde{f}) = f\Delta\widetilde{f} + \widetilde{f}\Delta f - 2\langle df, d\widetilde{f}\rangle, \;\; f, \widetilde{f} \in C^\infty(M).$$

ii)

$$\Delta(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot \Delta u - (f'' \circ u) \cdot |\nabla u|^2, \;\; u \in C^2(M), f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Es sei $\overline{g} := e^{2u} g$ die zu g gehörige konforme Metrik, wobei (M, g) eine n-dimensionale glatte riemannsche Mannigfaltigkeit und $u : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist.

i) Beweisen Sie folgende Identität:

$$\mathrm{div}^{\overline{g}} X = e^{-nu} \mathrm{div}^g (e^{(2-n)u} X)$$

für X glattes Vektorfeld auf M.

ii) Zeigen Sie folgende Formel für den Laplace-Operator der konformen Metrik

$$\Delta_{\overline{g}} = \Delta_g - (n-2) e^{-2u} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \partial_{x^i}.$$