Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 15.6.

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

5 Punkte
Es sei (M, g) eine glatte riemannsche Mannigfaltigkeit und $\overline{g} = e^{2u} \cdot g$, $u \in C^\infty(M)$. Beweisen Sie, dass für alle $\varphi \in C^2(M)$ gilt

$$Y_{\overline{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}u} Y_g \left(e^{\frac{n-2}{2}u} \varphi \right).$$

Aufgabe 2

5 Punkte
Mit den gegebenen Daten aus Aufgabe 1 und $p := \frac{2n}{n-2}$, zeigen Sie:

$$Y_{\overline{g}}(f^{-1}\varphi) = f^{1-p} Y_g(\varphi).$$

Insbesondere gilt für $f = \varphi$

$$\mathrm{scal}_{\overline{g}} = f^{1-p} \left(4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g f + \mathrm{scal}_g f \right).$$

Aufgabe 3

10 Punkte
Sei M eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gelte die Gleichung

$$Y_g(f) = \lambda f^{\frac{n+2}{n-2}}$$

für $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, wobei wir annehmen, dass die Skalarkrümmung konstant ist. Zeigen Sie folgende Aussagen:
i) sgn scal = sgn λ.
ii) f ist konstant, falls $\lambda \leq 0$.
Hinweis: Verwenden Sie das Maximum-Prinzip.