Das Yamabe-Problem: Übungen
Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 22.6.

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

5 Punkte Zeigen Sie, dass es für $p \in \mathbb{M}^n_\kappa$ und $\widetilde{p} \in \mathbb{M}^n_{\widetilde{\kappa}}$ mit $\kappa, \widetilde{\kappa} \in \mathbb{R}$ Zahlen $r, \widetilde{r} > 0$ und einen konformen Diffeomorphismus

$$B_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}(p) \to B_{\widetilde{r}}^{\mathbb{M}^n_{\widetilde{\kappa}}}(\widetilde{p})$$

gibt.

Aufgabe 2

5 Punkte Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit (nicht notwendigerweise vollständig). Sei $\Omega \Subset M$, das heißt $\Omega \subset M$ und $\overline{\Omega}$ ist kompakt. Sei Ω auch offen. Für $r \geq 0$ definieren wir

$$\Omega_r := \{y \in M \mid \exists x \in \Omega : d(x,y) < r\}.$$

Zeigen Sie: es gibt ein $R > 0$, so dass für alle $r \in [0, R]$ gilt: Ω_r ist offen und $\Omega_r \Subset M$. Konstruieren Sie daraus offene $\tilde{\Omega}_j$ mit

$$\Omega = \tilde{\Omega}_0 \Subset \tilde{\Omega}_1 \Subset \tilde{\Omega}_2 \Subset \ldots \bigcup_{j=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_j \Subset M.$$

Aufgabe 3

5 Punkte Sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Omega \Subset M$ offen. Sei $1 < q < \infty$. Die Funktion $u \in L^q(M)$ löse die Gleichung $\Delta u = f$ im schwachen Sinne. Sei $f \in C^{k,\alpha}(M)$ mit $\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} < \infty$. Zeigen Sie:

$$\|u|_\Omega\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C \cdot \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{L^q(M)}\right). \tag{1}$$

Hinweis: Wenden Sie die lokale elliptischen Abschätzungen, die Schauder-Abschätzungen in Kombination mit den Einbettungssätzen mehrfach an.