Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 29.6.

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

5 Punkte
Mit den Definitionen aus der Vorlesung, berechnen Sie das Differential von $\Phi = \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma$ für Translationen F sowie von $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$, jeweils in e_0.

Aufgabe 2

10 Punkte
Sei $\sigma : S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine positive Lösung von

$$\Delta u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad (*)$$

auf $\mathbb{R}^n$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \,\mathrm{dvol} < \infty$.
a) Zeigen Sie, dass sich dann $\frac{u}{u_1} \circ \sigma \colon S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}$ zu einer schwachen Lösung von $Y(v) = \lambda v^{\frac{n+2}{n-2}}$ auf $\mathbb{S}^n$ fortsetzt.
b) Nehmen Sie nun an, dass die a) konstruierte Funktion v in C^2 ist und die Gleichung $(*)$ sogar im klassischen Sinne erfüllt. Zeigen Sie $v(e_0) > 0$ und v ist glatt auf $\mathbb{S}^n$.
c) Zeigen Sie: Die Metrik $\tilde{g} := v^{4/(n-2)} g_{\mathrm{sph}}$ hat konstante Schnittkrümmung. Geben Sie die Schnittkrümmung an.
d) Berechnen Sie

$$\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \,\mathrm{dvol} \right)^{2/n}.$$

Hinweis: Es gilt die Gleichung

$$2^n \int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \,\mathrm{dvol}^{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{S}^n} v^{\frac{2n}{n-2}} \,\mathrm{dvol}^{\mathbb{S}^n} = \underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n, \widetilde{g})}_{\cong \mathbb{S}^n_r(0)} = r^n \omega_n$$

wobei $\widetilde{g} = v^{\frac{\kappa}{n-2}} g_{\mathrm{sph}}$ und ω_n bezeichnet das Volumen der n-Sphäre.