Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 6.7.

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

5 Punkte
Wir untersuchen die Gleichung

$$Y(f_s) = \lambda_s f_s^{s-1}, \qquad \|f_s\|_{L^s} = 1, \qquad \lambda_s = aQ_s^g(f_s)\,. \tag{1}$$

Sei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und seien $f_s \in L^s(M)$ Lösungen von (1) für $s \in [2, 2n/(n-2))$. Sei $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[2, 2n/(n-2))$ mit $\|f_{s_i}\|_{L^\infty} \to \infty$. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} s_i = \frac{2n}{n-2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die verstärkte Version von Satz 3.40.

Aufgabe 2

5 Punkte
a) Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $O(n)$ (oder allgemein eine kompakte Lie-Gruppe) und $\alpha{:}\, G\times M \to M,\ (\gamma, x) \mapsto \alpha(\gamma)(x)$ eine isometrische glatte Gruppenoperation. Sei g eine G-invariante Metrik und

$$[g]^G := \{\widetilde{g} \in [g] \mid \widetilde{g} \text{ ist } G-\text{invariant}\}.$$

Angenommen $\widetilde{g}$ erfüllt

$$Q(\widetilde{g}) = \inf\{Q(\overline{g}) \mid \overline{g} \in [g]^G\}.$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{g}$ konstante Skalarkrümmung hat.
b) Konstruieren Sie ein Beispiel von $M,\ G,\ \widetilde{g}$ wie oben, so dass $Q(\widetilde{g}) > \lambda(M, [g])$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ auf $M := S^{n-1} \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ durch Translation im zweiten Faktor und verwenden Sie Proposition 3.46 von Aubin.

Aufgabe 3

5 Punkte
Es seien $m, n \geq 3$ und $(M^m, g^M),\ (N^n, g^N)$ geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $Q(g^M) = \lambda(M, [g^M]),\ Q(g^N) = \lambda(N, [g^N])$. Bezeichne mit $g^{M\times N}$ die Metrik auf $M\times N$, welche als Produktmetrik aus g^M und g^N gewonnen wird.
a) Zeigen Sie, dass $g^{M\times N}$ konstante Skalarkrümmung $s_0 \in \mathbb{R}$ besitzt.
b) Ist $s_0 \leq 0$, dann gilt

$$Q(g^{M\times N}) = \lambda(M \times N, [g^{M\times N}]). \tag{$*$}$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass ein $\widetilde{g} \in [g^{M\times N}]$ existiert mit $Q(\widetilde{g}) = \lambda(M\times N, [g^{M\times N}])$.
c) Konstruieren Sie ein Beispiel für M, N, g^M, g^N, sodass $(*)$ nicht gilt.
Hinweis: $M = N = S^3,\ g^M = g_{\mathrm{sph}},\ g^N = L^2 g_{\mathrm{sph}}$.
d) [Offenes Problem – 10000 Bonuspunkte] Sei $\lambda_M > 0,\ \lambda_N > 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $\mu \in \mathbb{R}_+$ existiert, sodass $\widetilde{g} := g^M + \mu g^N$ die Gleichung $(*)$ erfüllt.