Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen

Keine Abgabe und Bewertung. Das Übungsblatt wird in der Übung am 10.4. besprochen.

Präsenzübungen

1. Aufgabe

Es sei $\mathcal{A}$ ein Atlas auf dem Hausdorffraum M. Dann gibt es genau einen maximalen Atlas $\mathcal{A}_{max}$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{max}$.

2. Aufgabe

(a) Sei $S^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre vom Radius r im $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeige Sie S^n_r ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Konstruieren Sie einen Atlas für den reell projektiven Raum $\mathbb{R}P := \{\{x, -x\} : x \in S^n\}$.

3. Aufgabe

Zeigen, dass für die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ alle Lösungen in einer Umgebung von $(-1, 1)$ als Graph einer Funktion in x dargestellt werden können.

4. Aufgabe

(a) Sei $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik. Bestimmen Sie die induzierte Metrik auf der Sphäre S^m.

(b) Es sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_+$ eine glatte Funktion und setze

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos(\varphi) \\ f(x)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in (a,b),\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am Freitag, den 13.4. in der Vorlesung.
Das Übungsblatt wird in der Übung am 17.04. besprochen.

Übungsblatt 1

1. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen glatte Untermannigfaltigkeiten sind:

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^n + y^n + z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^3$ für $n \in \mathbb{N}$. (Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$).

2. Aufgabe

Sei M der Rand des Einheitsquadrats in $\mathbb{R}^2$, also die Menge

$$M := \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in \{0,1\}\} \cup \{(x,y) \mid x \in \{0,1\},\ y \in [0,1]\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ ist und deshalb einen maximalen Atlas / eine glatte Struktur besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass M keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

3. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ eine glatte Funktion und für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$M_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

(a) Bestimmen Sie für welche c die Teilmenge $M_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension von M_c.

(b) Zeigen Sie, dass die glatten Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$

$$X(x_1,x_2,x_3) := x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$Y(x_1,x_2,x_3) := x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

sowie der Kommutator $[X,Y] = XY - YX$ sich zu glatten Vektorfeldern auf M_1 einschränken.

Je Aufgabe 5 Punkte.

Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am Freitag, den 20.4. in der Vorlesung.

Übungsblatt 2

1. Aufgabe

Seien $a, b > 0$ und bezeichne mit $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Rotationsellipsoid, welches durch die Parametrisierung

$$F\colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} a\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ a\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ b\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Berechnen Sie $g\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ und $g\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$.

(b) Berechnen Sie ein Normalenfeld ν.

(c) Berechnen Sie die zum Normalenfeld dazugehörige skalare zweite Fundamentalform. Geben sie dazu $h\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $h\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ und $h\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ an.

(d) Berechnen Sie die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung des Ellipsoids.

2. Aufgabe

Betrachten Sie die Wendelfläche $W \subset \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(s) \\ \sinh(t)\sin(s) \\ s \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

3. Aufgabe

Auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ definiere das Minkowskiprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_M\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $\langle x, y\rangle_M := -x_0y_0 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Der hyperbolische Raum $(\mathcal{H}^n, g^{\mathcal{H}})$ ist der Raum $\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle_M = -1,\ x_0 > 0\}$ ausgestattet mit der Metrik $g^H(X,Y) := \langle X, Y\rangle_M$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist.
(b) Zeigen Sie, dass $g^{\mathcal{H}}$ eine Riemannsche Metrik auf $\mathcal{H}^n$ ist.
(c) Beweisen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & \cdots & & \\ \sinh t & \cosh t & \cdots & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

beschriebene Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ den Raum $\mathcal{H}^n$ auf sich selbst abbildet. Zeigen Sie, dies definiert eine Isometrie.

Pro Aufgabe 5 Punkte.

Das Yamabe-Problem: Übungen

Universität Regensburg, Sommersemester 2018
Prof. Dr. Bernd Ammann/ Dr. Karsten Bohlen
Abgabe am 27.04.

Übungsblatt 3

1. Aufgabe

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $e_1, \ldots, e_m$ eine Orthonormalbasis von T_xM. Seien K, ric und scal die Schnittkrümmung, der Ricci-Tensor und die Skalarkrümmung. Zeigen Sie

$$\mathrm{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} K\big(\mathrm{span}\{e_i, e_j\}\big), \qquad \mathrm{scal}(x) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{m} K\big(\mathrm{span}\{e_i, e_j\}\big).$$

2. Aufgabe

Beweisen Sie, dass die stereographische Projektion

$$S^m \setminus \{(0, \cdots, 0, 1)^T\} \to \mathbb{R}^m, \ \begin{pmatrix} (\sin\vartheta) y \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \mapsto (\cot(\vartheta/2))y, \ \vartheta \in (0, \pi], \ y \in S^{m-1}$$

ein konformer Diffeomorphismus ist.

3. Aufgabe

Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei R der Riemannsche Krümmungstensor. Relativ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ haben wir

$$\sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor folgende Form in der lokalen Karte $x: U \to M$ hat:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l.$$

4. Aufgabe

Berechnen Sie Riemann-, Ricci-, Skalar- und Weyl-Krümmung von S^n, $S^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^5$, $\mathcal{H}^n$ und von $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

Je Aufgabe 5 Punkte.