Vorlesungsskript Analysis I

Prof. Bernd Ammann

Wintersemester 2018/19

Universität Regensburg

Datum der aktuellen Version: 16. November 2018

Öffentliche Version

Inhaltsverzeichnis

Logischer Aufbau des ersten Kapitels

Die Abschnitte des ersten Kapitels sind — aus Sichtweise des logischen Aufbaus — nicht optimal angeordnet. Unter anderem werden Begriffe wie Mengen, Funktionen, kartesische Produkte und ähnliches teilweise benutzt, bevor sie eingeführt werden. Dies erscheint vertretbar, da ich davon ausgehe, dass jede(r) Hörer(in) bereits eine gewisse Vorstellung von manchen der Begriffen hat, und wenn nicht, dann wird es sich in einem zweiten Durchgang klären, was gemeint ist. Die in der Vorlesung und im Skript gewählte Reihenfolge hat den Vorteil, dass man bereits früh in den Übungen auf die wichtigen Punkte eingehen kann, wie zum Beispiel die Themen Aussagenlogik und Quantoren.

Ich empfehle, mit einem gewissen zeitlichen Abstand dieses Kapitel noch einmal durchzuschauen, dann wird wahrscheinlich manches bisher unklare sich klären.

Warnungen

Legen Sie das Skript nicht in eine Ecke mit dem ruhigen Gewissen, es ja später lesen und durcharbeiten zu können. Beginnen Sie sobald wie möglich, die Lücken zu schließen. Schwierige Beweise durchschauen Sie am besten, wenn Sie sich überlegen, was der Beweis in konkreten Beispielen macht.

Bilder, Skizzen und Abschnitte die mit USW angedeutet werden, in der Vorlesung behandelt wurden, aber aus Zeitgründen noch nicht getext wurden, sind selbstverständlich auch relevant für mündliche und schriftliche Prüfungen.

KAPITEL 1

Elementare Logik und Grundlagen der Mathematik

1. Die Struktur des mathematischen Denkens

17.10.

Die natürlichen Zahlen werden seit Jahrtausenden intuitiv benutzt und untersucht. Sie sind uns vertraut, ohne dass wir aber zunächst wissen, was sie charakterisiert. So ähnlich war es mit vielen mathematischen Konzepten, zum Beispiel dem mathematischen Konzept der unendlichen Summe. Man nutzte viele Konzepte lange in einer vagen Bedeutung, ohne sich zu überlegen, wie man sie definiert. Alle Personen stimmen wohl überein, dass der Wert der unendlichen Summe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

die Zahl 2 sein sollte. Und derartige unendliche Summen sind oft wichtig, zum Beispiel in der Zinseszinsrechnung, bei physikalischen Problemen und vielem mehr. Deswegen wurden Sie bereits im Mittelalter diskutiert. Leider führte eine genauere Betrachtung zu wachsenden Problemen. Es gab unter anderem viele Diskussionen, was denn der Wert der unendlichen Summe

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$$

sei, manche Gelehrte vertraten die Ansicht es sei 0: mit der Begündung

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Dies erscheint überzeugend. Mit derselben Logik kann man aber auch begründen, dass man den Wert 1 erhält:

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Derartige Probleme motivierten die Mathematiker, die Mathematik auf solide Grundlagen zu stellen. Diese Bewegungen, die man Axiomatik nennen kann, begann im Bereich der Geometrie bereits mit Euklid von Alexandria (ca. 300 v. Chr.) und Aristoteles (384–322 v. Chr.). Wichtige Fortschritte in der Axiomatik der Geometrie und insgesamt der Axiomatik wurden im 19. Jahrhundert vollbracht.

Das Ziel der Axiomatik ist es, die gesamte Mathematik aus wenigen Grundaussagen, sogenannten Axiomen, herzuleiten.

Nehmen wir mal an, ich überlege mir, ob ich überhaupt existiere oder nicht. Mein Leben und meine Person könnte ja auch nur das Ergebnis einer Simulation eines gigantischen Großrechners sein. Was könnte ich tun, um diese Frage zu lösen? Ich kann mir selbst wehtun, ich empfinde

Schmerz, also sollte ich existieren! Falsch, das könnte Teil der gigantischen Simulation sein. Ich könnte einen Studenten in der hinteren Reihe fragen, ob ich existiere, er sagt ja. Ist dadurch meine Existenz bewiesen? Nein, denn er könnte Teil derselben Simulation sein. Sie sehen, ich kann meine eigene Existenz nicht zeigen, ohne andere Grundannahmen zu machen. Dennoch ist es sehr sinnvoll anzunehmen, dass ich existiere. Solche Probleme beschäftigen die Philosophen schon seit Jahrhunderten oder besser Jahrtausenden.

Genauso wie aber unser elementares Denken Grundannahmen braucht, benötigt auch die Mathematik bestimmte Grundannahmen, und diese Grundannahmen nennt man Axiome. Im Prinzip sollte in der heutigen Mathematik alles auf den Axiomen der Mengenlehre aufbauen. Daraus konstruiert man sich dann alle Objekte des mathematischen Denkens: Zahlen, Vektorräume, Matrizen, und vieles mehr. Oft versieht man Teilgebiete mit eigenen Axiomen, wie zum Beispiel die Axiome der klassischen Geometrie.

Axiome sind nicht mehr weiter beweisbar, sie werden einfach als gegeben hingenommen, als Grundannahmen unseres Denkens. Die Axiome erscheinen sinnvoll, entweder weil man sie als evident, also offensichtlich ansieht, oder weil man sie als Kennzeichen der Theorie ansieht. Aus diesen Axiomen werden dann Schlussfolgerungen gezogen, die ebenfalls durch weitere Axiome geregelt sind. Durch erlaubte Kombinationen von bereits bekannten wahren Aussagen erhält man neue wahre Aussagen. Eine Sammlung von so aufeinander aufbauenden wahren Aussagen, nennt man Beweis. Falls eine so erhaltene Aussage interessant erscheint, nennt man sie Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Satz, Hilfssatz, Folgerung oder ähnlich. Hierbei ist im allgemeinen ein Satz oder ein Theorem eine wichtige Aussage, ein Lemma oder ein Hilfssatz eine Aussage, die nur als Zwischenschritt dient, und eine Proposition hat eine Mittelstellung. Erhält man eine Aussage nahezu unmittelbar aus einem Theorem oder Satz, so nennt man dies eine Folgerung oder ein Korollar.

Damit die Aussagen nicht immer länger und länger werden, macht man Definitionen. Hierbei gibt man mathematischen Objekten oder mathematischen Sachverhalten einen Namen.

Die Mathematiker sind im Prinzip recht frei in der Wahl ihrer Definitionen. So könnte man die folgende Definition machen: Ein *Auto* ist eine Menge, in der die Elemente 1, 2 und 3 enthalten sind. Ein *Hund* ist eine Menge, in der die Elemente 1 und 2 enthalten sind. Man schließt daraus, dass jedes Auto einen Hund enthält. Diese Definitionen sind natürlich sehr irreführend, aber prinzipiell erlaubt. Wir Mathematiker bemühen uns die Dinge so zu benennen, dass sie möglichst etwas mit der „wirklichen Welt“ zu tun haben. Um Koordinaten auf einer Kugel anzugeben, definiert man den Begriff einer „Karte“, und ein „Atlas“ ist dann definiert als Menge von Karten, so dass alles überdeckt wird. Diese Begriffe sind dann zwar nicht genau das, was man damit umgangssprachlich meint, aber auch nicht völlig ohne Zusammenhang. Die mathematischen Begriffe „Halm“ oder „Garbe“ der Mathematik haben aber keinerlei Anwendungen in der Landwirtschaft. Die „Knoten“ der Mathematik sind aber wiederum nahe an dem, was man alltagssprachlich als Knoten bezeichnet.

Um den Unterschied zwischen Definitionen und Aussagen klar zu unterscheiden, nutzen wir die folgende Notation: $a = 1,234$ ist die Aussage „a ist gleich $1,234$“. Hingegen ist $a := 1,234$ eine Definition, a ist ab sofort eine kurze Schreibweise für $1,234$.

Viele Definitionen werden von allen Mathematikern gleich gemacht, es herrscht Konsens. Man ist sich aber nicht einig, ob die Definition der natürlichen Zahlen die Null einschließen soll oder nicht. Für unsere Vorlesung gilt: die natürlichen Zahlen sind

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Die Menge $\mathbb{N}_{>0} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnen wir als natürliche Zahlen ohne Null. Dies ist eine der üblichen Definitionen. Viele Mathematiker definieren hingegen die Menge der natürlichen Zahlen als $\{1, 2 \ldots\}$. Dass verschiedene Mathematiker die Definition verschieden wählen, ist nicht weiter schlimm. Ob Null eine natürliche Zahl ist oder nicht, ist eben Definitionssache. Man schaut sich die Definition des Autors an und weiß, was er meint.

In zentralistischen Ländern wie Frankreich ist klar geregelt: Null ist eine natürliche Zahl. In Deutschland besagt DIN 5473 ebenfalls, dass Null eine natürliche Zahl ist. Lehrer in der Schule sollten sich an diese DIN-Norm halten. Außer man wohnt in Bayern. An bayerischen Schulen ist Null keine natürliche Zahl, und daran sollte man sich als Lehrer auch halten, um die Schüler nicht zu verwirren.

Da die meisten Hörer dieser Vorlesung ja gleichzeitig Lineare Algebra bei Denis-Charles Cisinski hören, und er Franzose ist, ist bei uns Null eine natürliche Zahl. Die zukünftigen bayerischen Lehrer mögen dies bitte verzeihen und freuen sich vielleicht über diese „Zusatzqualifikation“ für andere Bundesländer.

Anders ist es bei der Zahl π. Dass der Wert dieser Zahl zwischen 3,1415 und 3,1416 liegt ist eine Aussage und keine Definition. Deswegen ist es lächerlich, dass der US-Bundesstaat Indiana 1897 den Wert von π auf $3,2$ gesetzlich festlegen wollte, um Berechnungen zu vereinfachen und um es den Schülern einfacher zu machen.

Wenn wir nun aber hier in der Vorlesung alles rigoros mit der eigentlich notwendigen mathematischen Strenge einführen würden, so müssten wir dem Aufbau der Mathematik folgen. Die Grundlagen hierbei bilden die Axiome der Logik und der Mengenlehre. Aus ihnen werden viele Aussagen gezeigt, und man kann dann irgendwann die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen einführen[1] und deren Eigenschaften studieren. Die reellen Zahlen erfüllen auch wieder einige wichtige Aussagen, die wir vorläufig die *Grundeigenschaften der reellen Zahlen* nennen wollen. Aus diesen Grundeigenschaften der reellen Zahlen kann man nun alle wichtigen Aussagen der Analysis herleiten. Nahezu alles, was wir zusammen in den nächsten Semestern behandeln werden, ergibt sich aus diesen Grundeigenschaften.

Nun gibt es aber ganz verschiedene Möglichkeiten, die reellen Zahlen zu definieren: in der Schule habe ich die Möglichkeit mit Intervall-Schachtelung kennengelernt, in der Vorlesung hier wollen wir Dedekindsche Schnitte behandeln, vor 5 Jahren in meiner Analysis I habe ich sie mit Hilfe von Cauchy-Folgen definiert. Jeder Zugang hat seine Vorteile und Nachteile in Bezug auf Anschaulichkeit und Verallgemeinerbarkeit. Wichtig ist hierbei: egal, wie man es macht, es ergeben sich immer die selben Grundeigenschaften. Deswegen ist es sinnvoll, die Grundeigenschaften der reellen

[1] mathematisch genauer gesagt: definieren

Zahlen als die *Axiome der reellen Zahlen* zu bezeichnen und dann alles aus diesen Axiomen der reellen Zahlen herzuleiten. Genauso haben auch die natürliche Zahlen ihre Axiome, die sogenannten Peano-Axiome[2]. Alle von Ihnen, die gleichzeitig die Lineare Algebra I besuchen, lernen dort die Axiome eines Vektorraums kennen und leiten daraus dann alle Eigenschaften ab, die Sie über Vektorräume wissen sollten.[3]

In der Vorlesung können wir nun aber leider nicht alles streng axiomatisch einführen, da dies viel zu lange dauern würde und die meisten von Ihnen auch nicht die nötige Geduld dafür aufbringen würden — vielleicht nicht einmal ich. Wir müssen also zu Anfang einen Kompromiss zwischen der nötigen Strenge und der angemessenen Kürze finden.

Der Plan ist deswegen, zunächst Begriffe wie Mengen, Abbildungen, logische Operationen und viele ähnliche Begriffe nur intuitiv einzuführen, also ohne die richtige mathematische Strenge.

Im Anhang A im Skript gebe ich einen kleinen Einblick, wie man die Mengenlehre mathematisch stringenter einführen kann. Die zugehörigen Abschnitte A.1 und A.2 werde ich in der Vorlesung nicht behandeln, aber ich empfehle ihn allen interessierten Studierenden zur Lektüre. Wenn Sie die Mengenlehre noch besser axiomatisch verstehen wollen, so ist es am besten, wenn Sie begleitend sich etwas selbst durcharbeiten, z.B. das Buch [**17**], aber auch da werden letztendlich Fragen zurückbleiben. Wenn Sie die Mengenlehre „richtig“ verstehen wollen, sollten Sie später mit einer gewissen mathematischen Reife, also in zwei oder drei Semester, die Logik nochmals systematisch studieren, z.B. an Hand der Bücher [**13**] oder [**20**].

Nachdem das einführende Kapitel beendet ist, wenden wir uns den Zahlen zu. Wir beschreiben grundlegende Eigenschaften der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Auch da werden wir in Teilen nicht streng mathematisch vorgehen. Ich gehe zum Beispiel davon aus, dass Sie intuitiv wissen, was die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen sind. Eigentlich wäre es aber auch wichtig, zum Beispiel die natürlichen Zahlen axiomatisch durch die Peano-Axiome (Anhang B) zu beschreiben. Es ist nämlich zunächst nicht so recht klar, was denn die Punkte in der Definition $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bedeuten soll. Dies soll in der Linearen Algebra I genauer behandelt werden.

Wir werden dann zu den reellen Zahlen kommen. Da diese für die Analysis ganz zentral sind, werden wir die Axiome diskutieren und von da an alles gründlich auf den Axiomen der reellen Zahlen aufbauen: Folgen, Reihen, Differentiation, Integration und vieles mehr.

Wichtig ist auch, dass Sie sich bewusst werden, was Sie in den nächsten Wochen alles lernen sollten. Den mathematischen Inhalt der Vorlesung sollten Sie durchdringen, damit umgehen lernen und danach nie wieder vergessen. Viel wichtiger aber noch ist, dass die meisten von Ihnen Ihre gewohnte Arbeitsweise umstellen müssen. Es geht dabei beim weitem nicht nur darum, dass Sie von nun an

---

[2] siehe Anhang B

[3] Das Wort „Sie“ ist bewusst groß geschrieben, da ich der Meinung bin, dass alle hier im Publikum dies beherrschen sollten.

in vieler Hinsicht für Ihr Lernen und Ihre Lernmethoden selbst verantwortlich sind, sondern vor allem darum, dass Sie das oben diskutierte rigorose Argumentieren lernen.

Sie müssen klar unterscheiden können zwischen Axiomen, Definitionen und Aussagen (Sätzen, Theoremen, Lemmata, Propositionen,...). Sie müssen lernen, Beweise zu verifizieren. Und Sie müssen lernen, Ideen zu bekommen, wie Sie selbst Beweise führen, und auch lernen, wie Sie dann diesen Beweis gut aufschreiben. Dies zu lernen, ist nur durch eine intensive Rückmeldung möglich, und das geht natürlich nicht in der großen Vorlesung hier. Deswegen sind die Übungen für Sie ganz wichtig.

2. Aussagenlogik

Was ist eine Aussage?

Beispiele 2.1. Die folgenden Ausdrücke sind Aussagen

A_1: $2 * 3 = 6$

A_2: $2 + 2 = 1 + 3$

A_3: Die Zahl 27 hat 4 Teiler.

A_4: Alle natürliche Zahlen haben eine Primfaktor-Zerlegung

A_5: Am 13.9.2018 hatte die Donau in Regensburg Hochwasser

A_6: Christian Lindner wurde im September 2018 zum Bundeskanzler gewählt

Wir gehen davon aus, dass wir eine Sprache haben, die aus Zeichenketten besteht. Manche Zeichenketten ergeben keinen Sinn, zum Beispiel „hejekl“ oder „Hund Maus Loch“, wir nennen sie syntaktisch nicht sinnvoll. Wenn die Zeichenkette etwas aussagt, so nennen wir sie syntaktisch sinnvoll. [4]

Definition 2.2. Eine *Aussage* ist eine syntaktisch sinnvolle Zeichenkette, die entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht (lateinisch: „tertium non datur“).

A_1 bis A_6 sind Aussagen, A_1 bis A_4 sind wahr, A_5 und A_6 sind falsch. Wenn eine Aussage wahr ist, so sagen wir auch: „Die Aussage gilt.“

Bemerkung 2.3. Es gibt Wissenschaftsbereiche, in den das „tertium non datur“ nicht gilt, in denen also neben „wahr“ und „falsch“ weitere Möglichkeiten zugelassen werden. Z.B. in der Quantenmechanik (Schrödingers Katze ist weder tot noch lebendig), Aussagen in der Wahrscheinlichkeitstheorie (Es regnet morgen mit Wahrscheinlichkeit 0,3), Philosophie, Teilgebiete der Logik. In

[4] Dies soll hier nicht genauer definiert und spezifiziert werden, da es für unsere Zwecke unwichtig ist.

unserer Vorlesung sind aber gemäß obiger Definition nur Aussagen zulässig, die entweder wahr oder falsch sind.

Man kann Aussagen durch elementare logische Operationen verknüpfen. Man kann diese Operationen zum Beispiel durch Wahrheitstafeln definieren.

Definition 2.4 (Negation). Die Negation $\neg$ wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert

A	$\neg A$
w	f
f	w

Lemma 2.5. *Für alle Aussagen A gilt $\neg(\neg A) = A$*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: A ist wahr
A ist wahr $\implies$ $\neg A$ ist falsch $\implies$ $\neg(\neg A)$ ist wahr

2. Fall: $A = f$
A ist falsch $\implies$ $\neg A$ ist wahr $\implies$ $\neg(\neg A)$ ist falsch □

Definition 2.6 (Aussagenlogische Verknüpfungen). Die Und-Verknüpfung $\wedge$, die Oder-Verknüpfung $\vee$, die Entweder-Oder-Verknüpfung $\veebar$, die Implikation (Wenn-Dann-Beziehung) $\rightarrow$, die umgekehrte Implikation (Dann-Wenn-Beziehung[5]) $\leftarrow$ und die Äquivalenz (Genau-Dann-Wenn-Beziehung) $\leftrightarrow$ sind durch die folgende Wahrheitstafel definiert

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$
w	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	w	f	w	f
f	w	f	w	w	w	f	f
f	f	f	f	f	w	w	w

Ist die Aussage $A \leftrightarrow B$ wahr, so sagen wir auch A und B sind *äquivalent*.

In zusammengesetzen Ausdrücken sind Negationen zuerst auszuführen, ansonsten muss man durch Klammern die Reihenfolge klären sofern nötig. Zum Beispiel gilt

$$\neg A \wedge B = (\neg A) \wedge B$$

und dies ist im allgemeinen nicht dasselbe wie $\neg(A \wedge B)$. Man darf aber die Klammern weglassen,
19.10. wenn das Resultat nicht von der Reihenfolge abhängt, Beispiele später.

Bisher haben wir nun angenommen A, B seien feste Aussagen. Oft steht der Wahrheitswert von einem Ausdruck noch gar nicht fest, z.B.

[5]Beispiel: (Die Straße wird nass.) $\leftarrow$ (Es regnet.). In Worten: Die Straße wird (dann) nass, wenn es regnet. Man kann logisch äquivalent auch sagen: Es regnet nur dann, wenn die Straße nass wird.

A: Am 1.2.2024 wird es ein Erbeben in Japan geben

Um auch solche Ausdrücke behandeln zu können, deren Wahrheitswert noch nicht festgelegt ist, führen wir nun Aussageformen ein.

Definition 2.7 (Ausageform). Eine Aussageform ist eine eine syntaktisch sinnvolle Zeichenkette, die

- entweder eine Aussage ist, oder
- die von einer oder mehreren Variablen abhängt und die erst nach Einsetzen von Werten in diese Variablen zu einer Aussage wird.

Hierbei muss man angeben, welche Werte für die Variablen überhaupt zugelassen sind.

Eine Aussageform $A(x)$ in einer Variablen x besteht also aus der Angabe der zulässigen Werte von x, die wir zu einer Menge M zusammenfassen, und einer Abbildung $A : M \longrightarrow \{w, f\}, x \mapsto A(x)$. Letztere Schreibweise bedeutet, dass jedem zulässigen Wert von x ein Wert $A(x)$ zugeordnet ist, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.[6] Hängt $A(x_1, x_2, \ldots)$ von mehreren Variablen hat, so sollte eine Wertemenge M_1 für x_1, eine Wertemenge M_2 für x_2 etc. vorgeben werden. Aussageformen in 2 Variablen sind also Abbildungen:

$$A : M_1 \times M_2 \longrightarrow \{w, f\}, \quad (x_1, x_2) \mapsto A(x_1, x_2).$$

Beispiele 2.8.

$A_1(x)$:	$x > 0$	Zulässig: $x \in \mathbb{R}$
$A_2(X)$:	Das Auto X ist rot	Zulässig: Alle Autos X der Welt
$A_3(B, C)$:	$B \vee C$	Zulässig: B und C sind Aussagen.
$A_4(B, C, D, E)$:	$(B \vee C) \to (\neg D \wedge E)$	Zulässig: B, C, D und E sind Aussagen.

Sind wahr und falsch die zulässigen Werte der Variablen x, so nennt man x eine *aussagenlogische Variable.* Verknüpft man ausagelogische Variablen durch die Negation $\neg$ oder die logischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\to$, $\leftarrow$ und $\leftrightarrow$, so nennt man die somit erhaltene Aussageform eine *aussagenlogische Formel* . Es ist hierbei erlaubt, mehrere logische Verknüpfungen oder Negationen anzuwenden. Insbesondere sind dann alle Variablen aussagenlogische Variablen. In den obigen Beispielen sind A_3 und A_4 aussagenlogische Formeln, die anderen keine.

Für aussagenlogische Formeln kann man viele Beziehungen herleiten, zum Beispiel folgende:

Proposition 2.9. *Für alle Belegungen von A, B und C mit Wahrheitswerten w und f sind die folgenden Aussagen wahr:*

[6]Der Pfeil $\longrightarrow$ in der Abbildungsbeschreibung ist nicht zu verwechseln mit der Implikation $\to$, deswegen wollen wir den ersteren zunächst länger und in roter Farbe schreiben. Später wird immer klar sein, welche Bedeutung der Pfeil nun hat und wir schreiben dann immer $\to$. Wir setzen hier voraus, dass die Begriffe „Menge“, „Produkte von Mengen“ und „Abbildung“ Ihnen bereits intuitiv vertraut sind, wenn nicht dann sind die Erklärungen dieses Abschnitts erst in ungefähr zwei Wochen verständlich.

(a) $A \vee \neg A$ *(Tertium non datur)*
(b) $\neg(A \wedge \neg A)$ *(Widerspruchsfreiheit)*
(c) $A \vee w$
(d) $\neg(A \wedge f)$
(e) $(A \wedge f) \leftrightarrow f$
(f) $(A \vee f) \leftrightarrow A$
(g) $(A \wedge w) \leftrightarrow A$
(h) $(A \vee w) \leftrightarrow w$
(i) $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ *(Kommutativität von $\vee$)*
(j) $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ *(Kommutativität von $\wedge$)*
(k) $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ *(Assoziativität von $\vee$)*
(l) $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ *(Assoziativität von $\wedge$)*
(m) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ *(de Morgansche Regeln)*
(n) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ *(de Morgansche Regeln)*
(o) $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ *(Distributivgesetze)*
(p) $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ *(Distributivgesetze)*
(q) $(A \leftrightarrow w) \leftrightarrow A$
(r) $(A \leftrightarrow f) \leftrightarrow \neg A$
(s) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \leftarrow A)$
(t) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ *(Kontraposition)*
(u) $(A \leftarrow B) \leftrightarrow (A \vee \neg B)$
(v) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
(w) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$
(x) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \veebar B)$
(y) $(A \wedge B) \rightarrow A$

Diese Proposition wird teilweise in den Übungsgruppen bewiesen, die verbleibenden können Sie selbst mit ähnlichen Methoden leicht beweisen. Die obigen Äquivalenzen, d.h. die obigen Aussagen in der Form $D \leftrightarrow E$, beweist man oft am besten, in dem man mit Hilfe einer Wahrheitstabelle D und E für alle Belegungen von A, B und C berechnet und dann vergleicht. Nachdem man einige Aussagen gezeigt hat, kann man durch deren Kombination weitere erhalten.

Aus (l) folgt zum Beispiel, dass $A \wedge B \wedge C$ ein syntaktisch sinnvoller Ausdruck ist, da das Ergebnis nicht von der Klammerung abhängt, und analog dazu ist natürlich auch $A \vee B \vee C$ ein sinnvoller Ausdruck.

Definition 2.10. Wir nennen zwei Aussageformen *äquivalent*, wenn sie von denselben Variablen abhängen, die Variablen dieselbe zulässigen Werte haben und wenn beide Aussageformen für alle Belegungen der Variablen mit Werten äquivalente Aussagen ergeben.

Somit sind also die Aussageformen D und E äquivalent genau dann, wenn $D \leftrightarrow E$ für alle Belegungen der Variablen wahr ist.

Beispiel 2.11. Proposition 2.9 (i) besagt, dass $A \vee B$ äquivalent zu $B \vee A$ ist.
Proposition 2.9 (x) besagt, dass $A \leftrightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \veebar B)$ ist.

Lemma 2.12. *Die aussagenlogischen Formeln $E_1(A, B, C) := A \to (B \to C)$ und $E_2(A, B, C) := (A \to B) \to C$ sind nicht äquivalent. (Präziser gesagt: Es ist nicht richtig, dass für alle Wahlen von A, B und C die aus E_1 und E_2 erhaltenen Aussagen äquivalent sind).*

Deshalb ist also $A \to B \to C$ kein syntaktisch sinnvoller Ausdruck, man muss hier Klammern setzen.

Beweis. Angenommen, die aussagenlogischen Formeln E_1 und E_2 wären für alle A, B und C äquivalent. Dann wären sie insbesondere äquivalent im Fall, dass A, B und C falsch sind. In diesem Fall sind $A \to B$ und $B \to C$ wahr und somit ist E_1 wahr und E_2 falsch. Somit haben wir einen Widerspruch zur obigen Annahme erhalten. Die Annahme war also falsch. Also ist das Lemma bewiesen. $\square$

Der obige Beweis ist ein Widerspruchsbeweis. Um eine Aussage F zu zeigen, nimmt man zunächst $\neg F$ an und leitet daraus einen Widerspruch her.

Hierbei ist

F: Für alle Wahlen von A, B und C sind die Aussagen $E_1(A, B, C)$ und $E_2(A, B, C)$ äquivalent.

Ein anderer Typ von Widerspruchsbeweis ist noch häufiger. Man möchte eigentlich die Aussage $E \to F$ zeigen. Man nimmt nun $\neg F$ an und leitet daraus $\neg E$ her. Man hat somit $\neg F \to \neg E$ gezeigt. Dies ist aber mit Proposition 2.9 (v) äquivalent zu $E \to F$.

Bemerkung 2.13. Die Symbole $\iff$ und $\implies$ nutzen wir ähnlich wie die Symbole $\leftrightarrow$ und $\to$, jedoch mit kleinen Unterschieden:

- Wenn wir aussagenlogische Variablen in einer aussagenlogischen Formel zusammenfügen, so wenden wir zuerst $\leftrightarrow$, $\to$, $\leftarrow$, $\wedge$,... und dann erst $\iff$ und $\implies$ an.
  Beispiel: Die Aussageform
  $$3 + 4 = 7 \iff A \vee \neg A$$
  ist als $(3 + 4 = 7) \iff (A \vee \neg A)$ zu lesen.
- Wir lesen Implikationsketten wie zum Beispiel $A \implies B \implies C$ als „(A impliziert B) und (B impliziert C)“. Als Beispiel betrachte man den Beweis von Lemma 2.5. Der Ausdruck $A \to B \to C$ ist hingegen syntaktisch gar nicht sinnvoll, da Klammern benötigt werden.

Analog sind Äquivalenzketten zugelassen und zu interpretieren, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\neg(A \vee \neg B) \wedge A &\overset{\text{„(n)“}}{\Longleftrightarrow} (\neg A \wedge B) \wedge A \\
&\overset{\text{(l)}}{\Longleftrightarrow} \neg A \wedge (B \wedge A) \\
&\overset{\text{(j)}}{\Longleftrightarrow} \neg A \wedge (A \wedge B) \\
&\overset{\text{(l)}}{\Longleftrightarrow} (\neg A \wedge A) \wedge B \\
&\overset{\text{„(b)“}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{f} \wedge B \\
&\overset{\text{„(e)“}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{f}
\end{aligned}$$

Bei jedem $\Longleftrightarrow$ findet eine Äquivalenzumformung statt, die direkt aus bereits bekannten Aussagen folgt. Der jeweilige Buchstabe über einem der $\Longleftrightarrow$-Pfeile gibt an, welche Eigenschaft in Proposition 2.9 verwendet wurde. Die Anführungszeichen in der ersten und den beiden letzten Zeilen deuten an, dass man leicht modifizierte Versionen der zitierten Punkte hernehmen muss. Die Verwendung des Zeichens $\Longleftrightarrow$ wäre natürlich auch ohne die Erklärungen darüber gestattet. Die obige Umformungskette ist somit ein Beweis[7] der Tatsache, dass die Aussageform $\neg(A \vee \neg B) \wedge A$ für alle Belegungen von A und B mit Wahrheitswerten falsch ist.

Eine ähnliche Verwendung wird im folgenden Beispiel verdeutlicht:

$$\begin{aligned}
\neg(A \leftrightarrow B) &\Longleftrightarrow \neg A \leftrightarrow B \\
&\Longleftrightarrow A \leftrightarrow \neg B \\
&\Longleftrightarrow A \veebar B \\
&\Longleftrightarrow \neg A \veebar \neg B
\end{aligned}$$

Die obigen Zeilen sind eine recht effektive Art und Weise auszudrücken, dass alle obigen Ausdrücke paarweise äquivalent sind. Allerdings muss man hier „etwas arbeiten“ um jeweils von der linken Seite von $\Longleftrightarrow$ zur rechten zu kommen. Dies geht in diesem Beispiel mit einer Wahrheitstafel sehr gut.

- Um Missverständnisse zu vermeiden, verbieten wir es, Ausdrücke, die $\Longleftrightarrow$ und $\Longrightarrow$ enthalten, durch weitere aussagenlogische Verknüpfungen zu verbinden. Das heißt beispielsweise, dass wir $A \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow C)$ als syntaktisch nicht sinnvoll betrachten, also vergleichbar zu „jjkwdh“.

Beispiel: Proposition 2.9 (w) und (x) ergeben dann zusammen

$$A \leftrightarrow B \Longleftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \Longleftrightarrow \neg(A \veebar B).$$

[7] Die Worte „beweisen“ und „zeigen“ haben in der Mathematik nahezu dieselbe Bedeutung.

Bemerkung 2.14. Man könnte zunächst auch nur $\neg$ und $\wedge$ durch eine Wahrheitstafel wie oben definieren und alle danach anderen aussagenlogischen Verknüfungen durch Formeln aus Proposition 2.9, z.B. $A \vee B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$ durch die de Morgansche Regel.

3. Mengen

Beschreibung 3.1 (Georg Cantor, 1845–1918). Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Hier wird erklärt, was eine Menge ist. Auch eine Definition erklärt, was ein neuer Begriff bedeutet. Dennoch ist die obige Erklärung keine mathematische Definition, sondern eine intuitive Erklärung. Wenn man in der Mathematik sauber definieren will, was eine Menge ist, darf man nur Worte und Strukturen benutzen, die zuvor schon ein klare Bedeutung haben. Es ist nun aber doch etwas unklar, was die Worte „Zusammenfassung“, “bestimmten“, “wohlunterschieden“ bedeuten.

Die obige „Beschreibung“ sagt uns also lediglich, was wir uns unter einer Menge vorstellen sollen. Das reicht uns aber für das folgende, und eine genaue Definition wäre zu aufwändig.

Eine Menge enthält Elemente. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Schreibweisen:
$M = \{x, y, z\} = \{x, x, y, z\} = \{y, x, z\}$ ist die Menge, deren Elemente x, y und z sind.

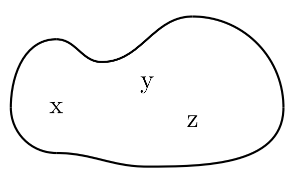
Man darf Elemente in den Klammern $\{\quad\}$ mehrfach aufzählen, sie sind dann aber nur einmal in der Menge. Ein Element kann in einer Menge sein, oder nicht darin sein, es kann aber nicht mehrfach in M enthalten sein.

$x \in M$ ist die Kurzschreibweise für „x ist ein Element von M“
$x \notin M$ ist die Kurzschreibweise für „x ist kein Element von M“

$$x \notin M \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(x \in M)$$

Beispiele 3.2.

(1) Vorstellung von $M = \{x, y, z\}$



(2) Die Menge aller natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$.
Übliche Formulierung: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

(3) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen [8]
(4) Die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen. (Die Null ist weder positiv noch negativ).[9]
(5) Ist $A(x)$ eine Aussageform in einer Variablen x, so bilden die zulässigen Werte von x eine Menge, die *Definitionsmenge* der Aussageform. In Beispiele 2.8 ist die Definitionsmenge von A_2 die Menge aller Autos. Die Definitionsmenge von A_1 ist $\mathbb{R}$.

Definition 3.3. Die Menge, die keine Elemente hat, heißt die *leere Menge*, und wird notiert als $\emptyset$ oder $\{\}$.

!ACHTUNG!. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ und $1 \neq \{1\} \neq \{\{1\}\}$.

Bei Aussagen und aussagenlogischen Formeln schreiben wir ab sofort $:\Longleftrightarrow$ für „ist definiert als".

Definition 3.4 (Teilmenge).

(1) Die Menge N *ist eine Teilmenge von* M, genau dann wenn jedes Element von N auch ein Element von M ist. Als Formel schreiben wir $N \subset M$.
(2) Die Menge N *ist eine echte Teilmenge von* M, genau dann wenn N eine Teilmenge M ist und von M verschieden ist. Wir schreiben hierfür $N \subsetneq M$.

Beispiele 3.5.

(1) $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ und $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$.
(2) Für alle Mengen M gilt: $\emptyset \subset M$
(3) Für alle Mengen M gilt: $M \subset M$

24.10.

Definition 3.6. Ist A eine auf M definierte Aussageform, so definieren wir
$$\{x \in M \mid A(x)\}$$
als die Teilmenge aller Elemente x von M, für die $A(x)$ wahr ist.

Es gilt somit für alle $y \in M$:
$$y \in \{x \in M \mid A(x)\} \quad \Longleftrightarrow \quad A(y)$$

Umgekehrt: Ist N eine Teilmenge von M, so ist

$$A(x) := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } x \in N \\ \text{f} & \text{falls } (x \in M) \wedge (x \notin N) \end{cases}$$

---

[8] Achtung: Was eine reelle Zahl ist, müssen wir eigentlich noch zuerst lernen!

[9] Sehr verbreitet ist auch die Schreibweise $\mathbb{R}_+^*$ für die positiven reellen Zahlen, und dann schreibt man $\mathbb{R}_+ := \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ für alle reellen Zahlen, die nicht negativ sind. In dieser Schreibweise soll $+$ natürlich positiv bedeuten. Deswegen ist auch die Schreibweise $\mathbb{R}_+$ verwirrend, denn wir haben $0 \in \mathbb{R}_+$, obwohl 0 nicht positiv ist. Ein dritte Möglichkeit, die man gelegentlich sieht, ist $\mathbb{R}^+$ für die positiven reellen Zahlen zu benutzen, und dann definiert man $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Um Verwirrung zu vermeiden, nutzen wir nur $\mathbb{R}_{>0}$ für die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{R}_{\geq 0}$, wenn die Null noch dazugenommen wird.

eine auf M definierte Aussageform und es gilt dann

$$N = \{x \in M \mid A(x)\}.$$

Beispiele 3.7.

(1) Seien A_1 und A_2 definiert wie in Beispiele 2.8, M_2 sei die Menge aller Autos. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid A_1(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}_{>0}$$

und

$$\{x \in M_2 \mid A_2(x)\}$$

ist die Menge aller roten Autos.

(2) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist

$$2\mathbb{N} := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Menge der durch k teilbaren ganzen Zahlen ist

$$k\mathbb{Z} := \left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{n}{k} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Analog $k\mathbb{N}$.

(3) Die Menge der Primzahlen ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ besitzt genau zwei Teiler (in } \mathbb{N})\}.$$

Wir führen somit noch eine weitere Art und Weise ein, Mengen zu beschreiben.

Definition 3.8. Sei M eine Menge und $f(x)$ ein von x abhängiger Ausdruck[10]. Dann bezeichne

$$\{f(x) \,\|\, x \in M\}$$

die Menge aller Objekte, die sich in der Form $f(x)$ für ein $x \in M$ schreiben lassen.[11] Analoges gilt auch wenn f mehrere Variablen besitzt, zum Beispiel

$$\{f(x, y) \,\|\, x \in M,\ y \in N\},$$

wenn f von den Variablen $x \in M$ und $y \in N$ abhängt.

Wir können dann $k\mathbb{Z}$ auch einführen als

$$k\mathbb{Z} := \{kz \,\|\, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Definition 3.9. Seien M und N Mengen. Wir definieren hieraus neue Mengen

[10] Die mathematisch präzisere Voraussetzung wäre: f ist eine Funktion in einer Variablen x.

[11] In einigen Wochen vereinfachen wir diese Schreibweise zu $\{f(x) \mid x \in M\}$.

(a) den *Schnitt* (oder die *Schnittmenge*) von M und N als

$$M \cap N := \{x \in M \mid x \in N\} = \{x \in N \mid x \in M\}.$$

Man kann auch sagen, $M \cap N$ ist die Menge, so dass gilt:

$$x \in M \cap N \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in M) \wedge (x \in N).$$

(b) die *Vereinigung(smenge)* von M und N als die Menge $M \cup N$, so dass

$$x \in M \cup N \quad :\Longleftrightarrow \quad (x \in M) \vee (x \in N).$$

(c) das *Komplement* von N in M als

$$M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\}$$

oder dazu äquivalent

$$x \in M \setminus N \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in M) \wedge (x \notin N)$$

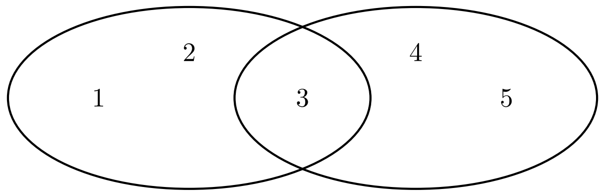
(d) die *symmetrische Differenz* von N in M als

$$M \Delta N := (M \cup N) \setminus (M \cap N) = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

oder dazu äquivalent

$$x \in M \Delta N \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in M) \veebar (x \in N)$$

BEISPIEL 3.10. Sei $A := \{1,2,3\}$ und $B := \{3,4,5\}$. Dann ist $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$ und , $A \Delta B = \{1,2,4,5\}$



DEFINITION 3.11. Zwei Mengen M und N heißen *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$.

Es gelten viele zu Proposition 2.9 analoge Aussagen.

PROPOSITION 3.12. *Seien P, Q und R Teilmengen von M. Dann gilt*

(a) $P \cup (M \setminus P) = M$
(b) $P \cap (M \setminus P) = \emptyset$
(c) $P \cup M = M$
(d) $P \cap \emptyset = \emptyset$
(e) $P \cap \emptyset = \emptyset$
(f) $P \cup \emptyset = P$
(g) $P \cap M = P$
(h) $P \cup M = M$
(i) $P \cup Q = Q \cup P$ *(Kommutativität von $\cup$)*
(j) $P \cap Q = Q \cap P$ *(Kommutativität von $\cap$)*
(k) $(P \cup (Q \cup R)) = ((P \cup Q) \cup R)$ *(Assoziativität von $\cup$)*

...

Jede Teilaussage dieser Proposition entspricht einer Teilaussage in Proposition 2.9 mit demselben kleinen Buchstaben. Zum Beispiel ist Proposition 3.12 (a) eine direkte Folgerung aus Proposition 2.9 (a), Proposition 3.12 (b) eine Folgerung aus Proposition 2.9 (b), etc.. Man beachte, dass die Bedeutungen von (d) und (e) in Proposition 2.9 fast diesseblen sind und deswegen dieselben „Übersetzungen“ in Proposition 3.12 haben. Analoges gilt für (c) und (h).

ÜBUNG 3.13. Übersetzen Sie die restlichen Aussagen aus Proposition 2.9 (j) bis (p) in Aussagen über Mengen. Beweisen Sie all diese Aussagen.

4. Quantoren

Aussagen[12] in der Art „Für alle Elemente $x \in M$ ist die Aussage $A(x)$ wahr.“ und „Es gibt (mindestens) ein Element $x \in M$, für das $A(x)$ wahr ist.“ sind in der Mathematik sehr häufig. Man

[12]Natürlich erlauben wir hier auch aussagenlogische Formeln und Aussageformen

schreibt kurz hierfür $\forall x \in M: A(x)$ und $\exists x \in M: A(x)$. Man nennt $\forall$ den *Allquantor* und $\exists$ den *Existenzquantor*. Als Beispiel betrachten wir die Definition von Stetigkeit, ein zentraler Begriff der Analysis.

Definition 4.1. Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* in $x_0 \in \mathbb{R}$, genau dann wenn

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in \mathbb{R}: \underbrace{(|x - x_0| < \delta) \to (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)}_{A(x, x_0, f, \delta, \epsilon)}$$

$A(x, x_0, f, \delta, \epsilon)$ ist eine Aussageform, die von fünf Variablen abhängt. Wir geben die möglichen Werte durch Mengen an: $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$), $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Sobald wir am Ende des Abschnitts Abbildungen und Produkte von Mengen eingeführt haben, kann man diese Aussageform auch als Abbildung

$$A: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \{w, f\}$$

betrachten.

Das folgende Regel ist intuitiv klar:

Regel 4.2 (Negation von Quantoren)**.** *Für jede auf M definierte Aussageform gilt:*

$$\neg \forall x \in M: A(x) \iff \exists x \in M: \neg A(x) \tag{4.3}$$

Indem man $A(x)$ durch $\neg A(x)$ ersetzt und dann die gesamte Äquivalenz auf beiden Seiten negiert, erhält man

$$\neg \exists x \in M: A(x) \iff \forall x \in M: \neg A(x) \tag{4.4}$$

Klammerregel.
Sei $A(x, y)$ eine Aussage die von den Parametern $x \in X$ und $y \in Y$, dann ist

$$\forall/\exists x \in X: \forall/\exists y \in Y: A(x, y)$$

zu lesen als

$$\forall/\exists x \in X: \Big(\forall/\exists y \in Y: A(x, y)\Big).$$

Es gilt offensichtlich

$$\forall x \in X: \forall y \in Y: A(x, y) \iff \forall y \in Y: \forall x \in X: A(x, y)$$

$$\exists x \in X: \exists y \in Y: A(x, y) \iff \exists y \in Y: \exists x \in X: A(x, y)$$

Man sagt kurz: „zwei af. (aufeinanderfolgende) Allquantoren vertauschen miteinander“, oder man sagt „zwei af. Allquantoren kommutieren“. Analog kommutieren zwei af. Existenzquantoren.

!ACHTUNG!. Allquantoren kommutieren nicht mit Existenzquantoren!

Die eine Richtung ist immer wahr:

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : A(x,y) \iff \exists y \in Y : \forall x \in X : A(x,y)$$

Aus der rechten Seite $\exists y \in Y : \forall x \in X : A(x,y)$ folgt die linke $\forall x \in X : \exists y \in Y : A(x,y)$. Die Aussagen unterscheiden sich aber sehr. Links darf die Wahl von y von x abhängen, rechts darf sie es nicht. Man hat hier also weniger Flexibilität in der Wahl von y, da man eines finden muss, so dass $A(x,y)$ für alle $x \in X$ richtig ist.

Die Umkehrung (d.h. die Richtung von links nach rechts) ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.5. Die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x > y \tag{4.6}$$

ist wahr. Denn für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ können wir die Zahl $y := x - 1$ hernehmen und diese erfüllt $y < x$. Deswegen ist für alle $x \in \mathbb{R}$ die Aussage $\exists y \in \mathbb{R}\ x > y$ wahr, also auch (4.6).

Die Aussage

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x > y \tag{4.7}$$

ist falsch. Denn für ein gegebenes $y \in \mathbb{R}$ gilt nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x > y$. Die Ungleichung gilt zum Beispiel nicht für $x := y$. Also gibt es kein $y \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R} : x > y$ wahr ist. Also ist (4.7) falsch.

Schreibweise 4.8. *Quantoren für eine Variable müssen stehen, bevor diese Variable gebraucht werden darf. (Sonst gelten sie als* nicht *syntaktisch sinnvoll.)* [13]

Beispiel 4.9. Ausdrücke in der Art „Es gilt $2x = x + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$“ erklären wir ab sofort und bis auf weiteres als syntaktisch nicht sinnvoll. Erlaubt sind nur Sätze wie „Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x = x + x$.“

Die Regel ist deswegen wichtig, damit nicht unklar bleibt, wie die folgende Aussage verstanden werden soll:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x > y$ für ein $y \in \mathbb{R}$.

Diesen Ausdruck könnte man als die wahre Aussage (4.6) oder als die falsche Aussage (4.7) verstehen. Deswegen legen wir durch die obige Regel fest, dass Ausdrücke wie das obige A syntaktisch nicht sinnvoll sind.

Frage 4.10. Ist die folgende Aussage A wahr?

$$A :\iff \quad \forall x \in \emptyset : x = x + 1.$$

[13] In späteren Semestern wird diese Regel nicht mehr immer befolgt, **falls** keine Missverständnisse zu erwarten sind.

Das didaktische Problem hier ist: obwohl uns bisher intuitiv klar war, was $\forall x \in M : A(x)$ bedeutet, ist $\forall x \in \emptyset : A(x)$ nicht intuitiv klar. In studentischen Lösungen der Aufgabenblätter steht oft in so einem Fall: „Da die Aussage $x = x + 1$ für kein einziges Element in $\emptyset$ gilt, gilt sie natürlich auch nicht für alle Elemente in $\emptyset$." Das ist ein weit verbreiteter Fehler.

Regel 4.11. *In der Mathematik ist die Aussage*

$$\forall x \in \emptyset : A(x)$$

für alle Aussageformen $A(x)$ immer wahr und die Aussage

$$\exists x \in \emptyset : A(x)$$

für alle Aussageformen $A(x)$ immer falsch.

Diese Regel ist letztendlich eine Definition, man könnte auch sagen eine Konvention. Es erscheint auch intuitiv klar, dass $\exists x \in M : A(x)$ nur dann wahr sein kann, wenn in M überhaupt irgendwelche Elemente existieren. Bei der anderen Regel könnte man Zweifel haben. Aber: wenn wir hier aber eine andere Konvention wählen würden, hätten wir viele Ausnahmen zu berücksichtigen. Zum Beispiel erscheint uns die folgende Äquivalenz für alle Mengen M intuitiv klar:

$$\forall x \in M : A(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in M \mid \neg A(x)\} = \emptyset.$$

Die rechte Seite ist für $M = \emptyset$ offensichtlich wahr.

Außerdem, ergibt sich die erste Teil in Regel 4.11 auch aus dem zweiten Grund: $\exists x \in \emptyset : \neg A(x)$ ist falsch, also auch $\neg\forall x \in \emptyset : A(x)$ falsch, also $\forall x \in \emptyset : A(x)$ wahr.

Notation 4.12. In vielen Büchern schreibt man auch oft $\exists x : A(x)$. Dies bedeutet, es existiert eine Menge, in der ein Element existiert, für das $A(x)$ wahr ist. Beispiel: die Aussage $\exists x : x \in M$ ist äquivalent zu $M \neq \emptyset$. Analog heißt $\forall x : A(x)$, dass für alle Mengen und alle Elemente darin die Aussage $A(x)$ wahr ist.[14] Analog hierzu: ist $A(x)$ eine auf allen Elementen von allen Mengen definierte Aussageform, so bezeichnet $\{x \mid A(x)\}$ die Menge aller Elemente, für die $A(x)$ wahr ist. Diese Bezeichnungen sind vor allem in axiomatischen aufgebauten Logik-Büchern wie [**13**] üblich, sind im Zugang unserer Vorlesung eine gefährliche Fehlerquelle: zum Beispiel ist $\{x \mid A(x)\}$ oft gar keine Menge, siehe Anhang A Abschnitt 1. Wir wollen sie deswegen nicht verwenden.

5. Potenzmenge und Mengensysteme

Definition 5.1. Ist X eine Menge, so ist $\mathcal{P}(X)$ definiert als die Menge aller Teilmengen von M. Man nennt $\mathcal{P}(X)$ die *Potenzmenge* von X.

$$x \in \mathcal{P}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad x \subset X$$

[14] Bei dieser „Notation" handelt es sich eigentlich auch um eine Definition; es ist die Definition einer Schreibweise. Wir verwenden hier den Begriff Notation, um anzudeuten, dass hier kein neuer Begriff eingeführt wird, sondern eine neue Schreibweise.

Beispiele 5.2.

(1) $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
(2) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

Definition 5.3. Ein *Mengensystem* (über einer Grundmenge X) ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$. Dies bedeutet, dass M genau dann ein Mengensystem ist, wenn alle Elemente von M eine Teilmenge von X sind.

Wir definieren dann
$$\bigcup M := \{x \in X \mid \exists m \in M : x \in m\}$$
und falls zusätzlich $M \neq \emptyset$ definieren wir
$$\bigcap M := \{x \in X \mid \forall m \in M : x \in m\}.$$

Offensichtlich gilt $\bigcup M \subset X$ und $\bigcap M \subset X$.

Beispiele 5.4. Beliebige Grundmenge X, $A \subset X$, $B \subset X$

(1) Für $M := \{A\}$ gilt $\bigcup M = \bigcap M = A$.
(2) Für $M := \{A, B\}$ gilt $\bigcup M = A \cup B$ und $\bigcap M = A \cap B$.

Mengensysteme über der Grundmenge $\mathbb{Z}$

(3) Für $M := \{\{1,2,3\}, \{3,5,7\}, \{1,3,5\}\}$ gilt $\bigcup M = \{1,2,3,5,7\}$ und $\bigcap M = \{3\}$.
(4) Sei
$$M := \{k\mathbb{Z} \parallel k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\} = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, \ldots\}.$$
Dann gilt $\bigcup M = \mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\}$ und $\bigcap M = \{0\}$.

Falls $X \subset Y$, so ist jedes Mengensystem über X auch ein Mengensystem über Y und die obigen Definitionen von $\bigcup M$ und $\bigcap M$ hängen nicht von der verwendeten Grundmenge ab. Wir lassen deswegen die Angabe der Grundmenge in Zukunft weg.

$\bigcap \emptyset$ ist nicht definiert worden, denn mit obiger Definition wäre dann $\bigcap \emptyset = X$, also von der Wahl der Grundmenge abhängig. **26.10.**

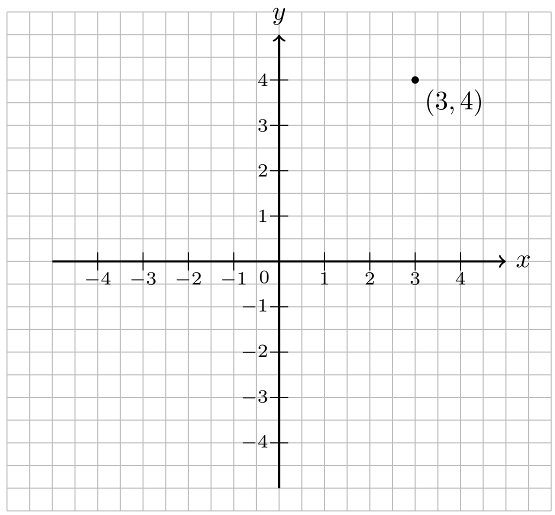
6. Paare und kartesische Produkte

Es gilt $\{1,2\} = \{2,1\}$. Eine Menge mit genau zwei Elementen heißt *ungeordnetes Paar*. In der Mathematik brauchen aber auch (geordnete) Paare[15]. Wir wollen an einem Beispiel erklären, wieso sie gebraucht werden, und uns dann um eine saubere Defintion kümmern.

Réné Descartes (1596–1650):
Nach Wahl eines Ursprungs und einer Basis beschreibt man Punkte auf einer Geraden durch eine

[15]Ein Paar ist immer ein geordnetes Paar, es sei denn wir sagen explizit '„ungeordnet“ dazu.

reelle Zahl, Punkte in einer Ebene durch zwei reelle Zahlen und Punkte im Raum durch drei reelle Zahlen.



$\{$ Punkte in der Ebene $\}$ $\cong$ $\{$ geordnete Paare (x, y) von zwei reellen Zahlen x und $y\}$
$\cong$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\cong$ $\mathbb{R}^2$

Paar := geordnetes Paar

„Definition“ 6.1. Sind M und N Mengen, so definieren wir

$$M \times N := \{(m, n) \,\|\, m \in M,\, n \in N\}$$

wobei (m, n) ein Paar aus m und n ist. Man nennt $M \times N$ das *(kartesische) Produkt* von M und N.

Für Paare gilt z.B. $(3, 4) \neq (4, 3)$.

Das Wort „kartesisch“ kommt vom Namen „Cartesius“ und dies ist die lateinische Version von Descartes.

Das problematische an obiger „Definition“ ist, dass wir den Begriff „Paar“ noch gar nicht definiert haben.

Eine Möglichkeit, wäre ein Axiom einzuführen, das uns die Existenz von Paaren liefert.

Axiom 6.2. *Zu jedem $m \in M$ und $n \in N$ gibt es ein (m, n), genannt* Paar*, mit der folgenden Eigenschaft: für alle $m, \tilde{m} \in M$ und alle $n, \tilde{n} \in N$ gilt*

$$(m, n) = (\tilde{m}, \tilde{n}) \Longleftrightarrow m = \tilde{m} \text{ und } n = \tilde{n}.$$

Ein ähnliches Axiom wurde in der Linearen Algebra so ähnlich eingeführt (Axiom 1.1.6), es ergänzt die dort präsentierten anderen Axiome. Wenn man aber naiv argumentiert, wie bei uns der Fall, oder die zumeist verwendeten Axiomen-Systeme ZFC oder NBG (siehe Anhang A) nutzt, kann man eine Konstruktion machen, die genau solch eine Paarbildung liefert. Sie macht aus dem obigen Definitions-Versuch („Definition“ 6.1) eine richtige Definition.[16] Das heißt, man kann Axiom 6.2 weglassen und durch diese Definition ersetzen.

DEFINITION 6.3 (Konstruktion von Paaren nach Kuratowski). Wir definieren das Paar von m und n als

$$(m, n) := \{\{m\}, \{m, n\}\}.$$

Diese Definition ist unanschaulicher als sie zunächst aussieht, wie das folgende Beispiel zeigt:

BEISPIEL 6.4. Für $M = N = \mathbb{N}$ und $m = n = 1$ gilt $(m, n) = \{\{1\}\}$.

Aus diesem Grund wählen manche Bücher andere Definitionen, die aber wieder andere Probleme haben. Wichtig ist für uns aber letztendlich gar nicht, was Produkte „wirklich sind“, sondern dass die Eigenschaft in Axiom 6.2 erfüllt ist.

LEMMA 6.5. *Für das von Kuratowski definierte Paar gilt:*

$$(m, n) = (\tilde{m}, \tilde{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad m = \tilde{m} \text{ und } n = \tilde{n}.$$

Beweis. Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist offensichtlich.

Zu „$\Longrightarrow$“: Sei $(m, n) = (\tilde{m}, \tilde{n})$. Also gilt nach Definition

$$\{\{m\}, \{m, n\}\} = \{\{\tilde{m}\}, \{\tilde{m}, \tilde{n}\}\}. \tag{6.6}$$

Wir wissen bereits, dass $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ ein oder zwei Elemente besitzt. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: *Die Menge* $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ *besitzt ein Element.*
In diesem Fall ist dann $\{m\}$ das einzige Element und somit $\{m\} = \{m, n\}$ und deswegen $m = n$. Wegen (6.6) hat auch $\{\{\tilde{m}\}, \{\tilde{m}, \tilde{n}\}\}$ nur ein Element, also ergibt sich analog $\tilde{m} = \tilde{n}$. Es gilt nun

$$\{m\} = \{\{m\}, \{m, n\}\} = \{\{\tilde{m}\}, \{\tilde{m}, \tilde{n}\}\} = \{\tilde{m}\}.$$

Es folgt $m = n = \tilde{m} = \tilde{n}$.

2. Fall: *Die Menge* $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ *besitzt zwei Elemente.*
Es gilt also $\{m\} \neq \{m, n\}$ und somit $m \neq n$. Analog enthält $\{\{\tilde{m}\}, \{\tilde{m}, \tilde{n}\}\}$ die verschiedenen Elemente $\{\tilde{m}\}$ und $\{\tilde{m}, \tilde{n}\}$, und daraus folgt $\tilde{m} \neq \tilde{n}$. Da $\{m\}$ und $\{\tilde{m}\}$ genau ein Element enthalten, und da $\{m, n\}$ und $\{\tilde{m}, \tilde{n}\}$ genau zwei Elemente enthalten, folgt aus (6.6), dass $\{m\} = \{\tilde{m}\}$ und somit $m = \tilde{m}$. Außerdem gilt dann $\{m, n\} = \{\tilde{m}, \tilde{n}\}$. Da diese Menge außer $m = \tilde{m}$ noch genau ein weiteres Element enthält, gilt auch $n = \tilde{n}$. □

[16] Wir können dann also die Anführungsstriche weglassen.

DEFINITION 6.7. Falls M_1, M_2, …, M_k Mengen sind, so definieren das *k-fache kartesische Produkt* hiervon als

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k := M_1 \times (M_2 \times (\cdots M_{k-1} \times M_k)) \cdots).$$

Elemente hiervon nennen wir k-Tupel. Wir schreiben sie in der Form $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, wobei $x_i \in M_i$. Ein Paar ist also ein 2-Tupel. Ein 3-Tupel nennt man auch *Tripel*. 4-Tupel sind *Quadrupel*, 5-Tupel sind *Quintupel*. Wir nutzen auch die Schreibweise

$$M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k\text{-mal}}.$$

Beispiel: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

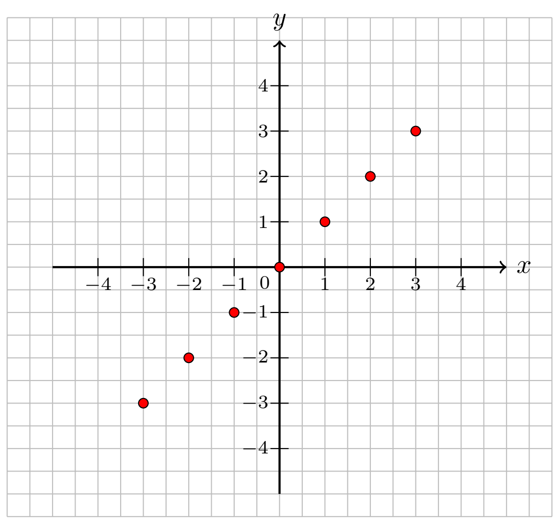
7. Relationen, funktionale Relationen, Abbildungen

DEFINITION 7.1. Eine *Relation* R auf der Grundmenge M ist eine Teilmenge von $M \times M$. Wir schreiben dann xRy für die Aussage(form) $(x, y) \in R$.

Falls $M \subset N$, so ist jede Relation auf M auch eine Relation auf N. Oft ist die Grundmenge ohne Bedeutung. Wichtig ist vor allem, dass ein solches Resservoir an möglichen Werten überhaupt existiert.

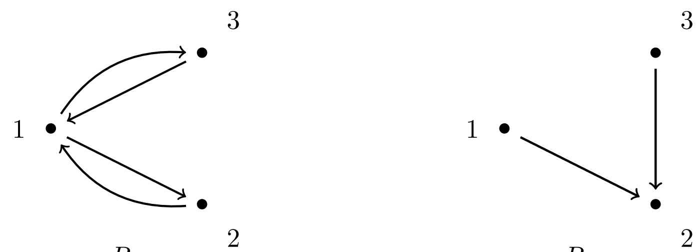
BEISPIELE 7.2.

(1) $\emptyset$ ist eine Relation auf jeder Menge.
(2) $\{\emptyset, (1, 2)\}$ ist keine Relation, da $\emptyset$ kein Paar ist.
(3) Ist M eine Menge, so ist $\delta_M := \{(x, x) \,\|\, x \in M\}$ eine Relation auf M. Man nennt sie die *Diagonale von M*.



Die Diagonale der Menge $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(4) $\leq_{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}$.
(5) $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x^2 + 2\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}$.
(6) $M = \{1, 2, 3\}$. Wir definieren die Relationen $R_1 \subset M \times M$ und $R_2 \subset M \times M$ durch das folgende Bild oder sagen $R_1 := \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$ und $R_2 := \{(1, 2), (3, 2)\}$



R_1 R_2

Definition 7.3. Sei R eine Relation auf M. Die Relation heißt

(1) *reflexiv auf* M $:\Longleftrightarrow \forall x \in M : xRx$,
(2) *symmetrisch* $:\Longleftrightarrow \underbrace{\forall x \in M : \forall y \in M :}_{\forall x, y \in M:} (xRy \to yRx)$,
(3) *antisymmetrisch* $:\Longleftrightarrow \forall x, y \in M : \big((xRy \wedge yRx) \to x = y\big)$,
(4) *transitiv* $:\Longleftrightarrow \forall x, y, z \in M : \big((xRy \wedge yRz) \to xRz\big)$,
(5) *Äquivalenzrelation auf* M, falls R reflexiv auf M, symmetrisch und transitiv ist.
(6) *Ordnung(srelation) auf* M oder *partielle Ordnung(srelation) auf* M, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
(7) Erfüllt eine Ordnungsrelation R auf M zusätzlich die Eigenschaft

$$\forall x, y \in M : \big(xRy \vee yRx\big)$$

dann nennt man R eine *totale Ordnung(srelation)*.[17]

Beispiele 7.4. Zu den Beispielen 7.2 (3), (4) und (6):

(3) δ_M ist reflexiv auf M, symmetrisch, und transitiv, also eine Äquivalenzrelation auf M.
Es gilt

$$x\delta_M y \Longleftrightarrow x = y \wedge x \in M$$

(4) $\leq_{\mathbb{R}}$ ist reflexiv auf $\mathbb{R}$, antisymmetrisch und transitiv, also eine Ordnungsrelation auf M. Diese Ordnung ist total.
(6) R_1 ist nicht transitiv, denn $3R_11$ und $1R_12$ sind wahr, aber $3R_12$ ist falsch. R_1 ist auch nicht reflexiv. Also ist R_1 auch weder Ordnungsrelation noch Äquivalenzrelation. R_1 ist symmetrisch und nicht antisymmetrisch.
R_2 ist transitiv, antisymmetrisch, nicht reflexiv, nicht symmetrisch.

[17]Manche Quellen nennen solche eine Relation eine lineare Ordnungsrelation. Andere Quellen wiederum bezeichnen unsere „Ordnungsrelationen" als „Halbordnungen" und unsere „totalen Ordnungen" als „Ordnungen".

Beispiele 7.5. Ist X eine Menge, so definieren wir

$$\subset_X := \{(A,B) \in \mathcal{P}(X)^2 \mid A \subset B\}.$$

$\subset_X$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(X)$. Sie ist keine totale Ordnung, wenn X mindestens 2 Elemente besitzt. [18]

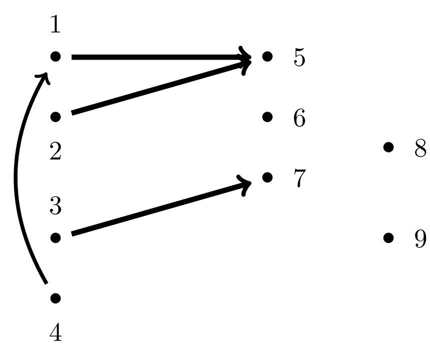
Definition 7.6. Eine Relation F auf M nennen wir eine *funktionale Relation*, falls gilt:

$$\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : \Big((x,y) \in F \wedge (x,z) \in F\Big) \to y = z.$$

Zu jedem $x \in M$ gibt es also höchstens ein $y \in M$ mit xFy. Wir sagen dann: *x wird durch F auf y abgebildet* und schreiben $x \mapsto y$ oder $y = F(x)$.

Beispiele 7.2 (1), (3) und (5) sind funktionale Relationen. Beispiel (4) ist keine funktionale Relation. In Beispiel 7.2 (6) ist R_2 funktional, aber R_1 ist nicht funktional.

Beispiel 7.7. Es gelte nun xRy, falls im folgenden Bild ein Pfeil von x nach y führt.



Dann ist R eine funktionale Relation auf der Grundmenge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

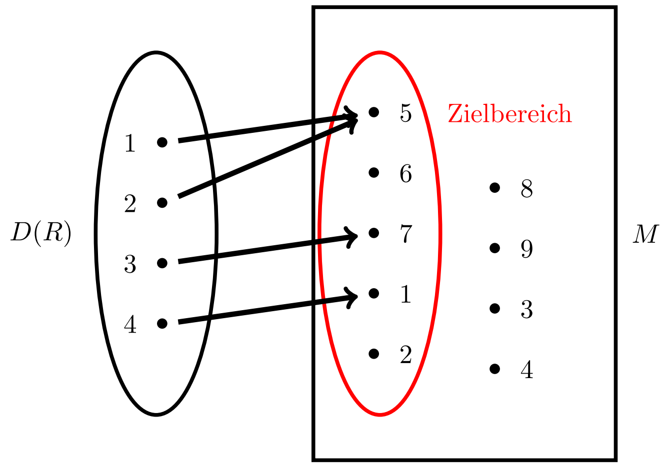
Definition 7.8. Ist R eine Relation auf der Grundmenge M, so definieren wir[19]:

$$D(R) := \{x \in M \mid \exists y \in M : xRy\},$$
Definitionsbereich von R;
$$B(R) := \{y \in M \mid \exists x \in M : xRy\},$$
Bild der Relation R;

[18] Bei Ordnungsrelation werden immer zwei Objekte verglichen: Ist eine Zahl größer als eine andere? Ist eine Menge in der anderen enthalten? Etc. Insofern sind $\leq_{\mathbb{R}}$ und $\subset_X$ ganz wichtige Beispiele. δ_M ist auch antisymmetrisch, also auch eine Ordnungsrelation. Sobald M mindestens 2 Elemente besitzt, ist es keine totale Ordnungsrelation. Dennoch ist δ_M ein atypisches Beispiel, denn δ_M ist die *einzige* symmetrische Ordnungsrelation auf M.

[19] Viele Bücher, z.B. [**17**] bezeichnen $B(R)$ als Wertebereich oder Wertemenge. Es gibt aber auch Bücher, die den Begriff Wertebereich im Sinne des unten definierten Zielbereichs definieren. Wir werden aus diesem Grund die Begriffe „Wertebereich“ und „Wertemenge“ vermeiden.

Beispiel 7.7. (fortgesetzt) Wir zeichnen links die Definitionsmenge $D(R)$, rechts die Grundmenge M. Die bisherigen Pfeile zeichnen wir so ein, dass sie in $D(R)$ beginnen und in M enden. Wir wählen einen „Zielbereich“ Y aus mit $B(R) \subset Y \subset M$.



Eine funktionale Relation R mit $D(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $B(R) = \{1, 5, 7\}$, Zielbereich $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ und Grundmenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definition 7.9. Eine *Abbildung* ist ein Tripel (f, X, Y), bestehend aus Mengen X und Y und einer funktionalen Relation f auf der Grundmenge $X \cup Y$, wobei $D(f) = X$ und $B(f) \subset Y$. Zumeist schreibt man Abbildungen als $f : X \longrightarrow Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$. Man nennt X den Definitionsbereich der Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, man nennt Y den *Zielbereich* der Abbildung und man nennt f den *Graphen* der Abbildung. Eine *Abbildung von X nach Y* ist eine Abbildung mit Definitionsbereich X und Zielbereich Y. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y notieren wir als $\mathrm{Abb}(X, Y)$ oder als Y^X. Die Notation $x \mapsto y$ bedeutet, dass x auf y abgebildet wird, d.h. (x, y) ist ein Element der funktionalen Relation.
Der Begriff *„Funktion“* ist gleichbedeutend zum Begriff „Abbildung“. Es gibt Situationen, in denen man häufiger den Begriff „Abbildung“ nutzt, in anderen ist der Begriff „Funktion“ gebräuchlicher. Zum Beispiel, wenn der Zielbereich die reellen Zahlen sind, so redet man von *(reell-wertigen) Funktionen*.

31.10.

Beispiele 7.10.

(a) $f := \{(x, x^2) \,\|\, x \in [0, 5]\} \subset [0, 5] \times \mathbb{R}$ ist eine funktionale Relation mit $D(f) = [0, 5]$ und $B(f) = [0, 25]$. Dann ist $f : [0, 5] \longrightarrow [-4, 40]$ eine Abbildung. Wir schreiben derartige Abbildungen als

$$\begin{array}{rcl} f : [0,5] & \longrightarrow & [-4, 40] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Alternativ kann man die zweite Zeile auch durch $f(x) = x^2$ oder $f(x) := x^2$ ersetzen.

(b) Sei f wie oben. Die Abbildungen $F_1 := (f, [0,5], [0,25])$ und $F_2 := (f, [0,5], [-4, 40])$ sind verschieden, obwohl dieselbe funktionale Relation f zu Grunde liegt.
(c) Die *Identität* id_M von M ist die Abbildung (δ_M, M, M), die wir (dem obigen Beispiel folgend) auch als $M \longrightarrow M$, $x \mapsto x$ schreiben können.
(d) Ist M eine Teilmenge von N, so nennen wir die Abbildung (δ_M, M, N) die *Inklusion von M in N* oder genauer *Inklusion der Menge M in die Menge N*. [20]

Bemerkung 7.11. Aus Ihrer jetzigen Sicht ist der essentielle Unterschied zwischen einer funktionalen Relation und einer Abbildung, dass im Begriff der Abbildung auch der Zielbereich festgelegt ist, während eine funktionale Relation keinen Zielbereich hat. [21] Später werden der Definitionsbereich und der Zielbereich zusätzliche Struktur tragen: z.B. eine Vektorraumstruktur, eine Gruppenstruktur oder eine Abstandsfunktion. Da wichtige Eigenschaften von Abbildungen wie z.B. Linearität und Stetigkeit von solcher Zusatzstruktur abhängt, wird es dann hilfreich sein, dass auch der Definitionsbereich im Tripel einer Abbildung enthalten ist.

Es gibt auch einige Teilbereiche der Mathematik und ihren Anwendungen, in denen man $D(f) = X$ durch $D(f) \subset X$ ersetzt. Dies ist zum Beispiel bei den „dicht definierten Operatoren„ der Funktionalanalysis und der Quantenmechanik der Fall, zum Beispiel der Orts- und der Impuls-Operator der Quantenmechanik.

Bemerkung 7.12. Zur Interpretation: Äquivalenz- und Ordnungs-Relationen auf der einen Seite und funktionale Relationen sind zwar ähnlich definiert (als Relationen und somit als Mengen, deren Elemente Paare sind). Dennoch interpretiert man sie anders: Äquivalenz- und Ordnungsrelationen vergleichen zwei Objekte. Beispiel: die Relation $\leq_{\mathbb{R}}$, gibt an, ob die links stehende Zahl kleiner oder gleich der rechts stehenden ist. Die Interpretation von funktionalen Relationen ist dynamischer, $x \mapsto x^2$ ordnet x den Wert x^2 zu, so wie ein(e) Platzanweiser(in) im Theater jedem Zuschauer sagt, in welchem Stockwerk er den Theatersaal betreten darf: im Parkett (0. Stockwerk) oder im k-ten Rang (k-tes Stockwerk): jedem Zuschauer wird ein Stockwerk zugeordnet. Aus diesem Grund ist die Schreibweise xRy für Ordnungs- und Äquivalenzrelationen üblich, wohingegen die Schreibweise $y = R(x)$ für funktionale Relationen üblich ist. Beides ist defniert als $(x, y) \in R$.

Bemerkung 7.13. Sei A eine auf M definierte Aussageform und sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Dann gilt

$$\{f(x) \parallel x \in M\} = \{y \in N \mid \exists x \in M : f(x) = y\} = B(f).$$

Definition 7.14. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

[20] wichtig ist hier die Konjugation von „die Menge“: Genitiv (bzw. von-Konstruktion), dann Akkusativ

[21] Vergleich zu anderen Lehrbüchern: Es herrscht Uneinigkeit in der Literatur, ob eine Abbildung Information über den Zielbereich trägt oder nicht. Das Lehrbuch [**12**] unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen „Funktionen“, die wie unsere „funktionale Relationen“ definiert sind, und „Funktionen von X nach Y“, die im wesentlichen unseren „Abbildungen“ entsprechen. In [**17**] bedeuten die Begriffe „funktionale Relation“, „Funktion“ und „Abbildung“ dasselbe, es bleibt aber dort unklar, ob die oben definierten Abbildungen F_1 und F_2 in diesem Buch gleich oder verschieden sind. Wir werden in der Vorlesung die obigen Definitionen nutzen und zulassen, um innerhalb unserer Analysis I Klarheit zu schaffen.

(1) Für $M \subset X$ definieren wir die *Einschränkung* oder *Restriktion* von $f : X \longrightarrow Y$ auf M als die Abbildung $(f|_M, M, Y)$, wobei

$$f|_M := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in M \wedge y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \parallel x \in M\},$$

(2) Ist $g : Y \longrightarrow Z$ eine weitere Abbildung, so definieren wir die *Verkettung* oder die *Komposition* von $g : Y \longrightarrow Z$ mit $f : X \longrightarrow Y$ als die Abbildung $(g \circ f, X, Z)$, wobei

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Man liest $g \circ f$ als „g nach f“.

Definition 7.15.

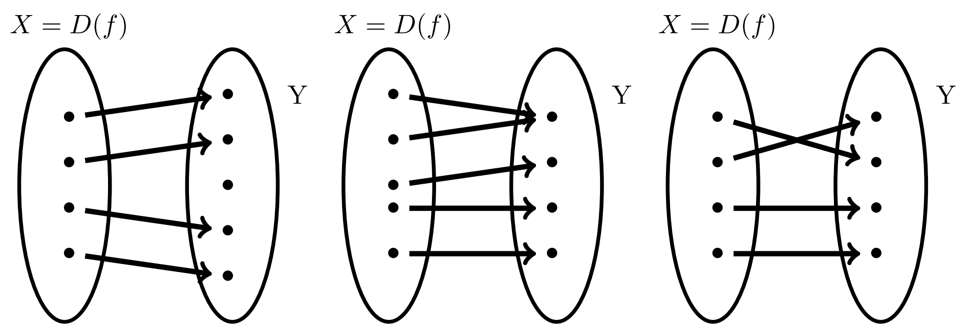
(1) Eine funktionale Relation f bzw. eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *injektiv*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2).$$

Dies bedeutet, dass jedes Element in X unter f auf ein anderes Element in Y abgebildet wird.

(2) Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *surjektiv*, falls $B(f) = Y$.

(3) Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.



Wenn f eine funktionale Relation ist, so ist $f : D(f) \longrightarrow B(f)$ eine surjektive Abbildung.

Beispiele 7.16. (in der Vorlesung übersprungen = grau)

(a) Die Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
(b) Die Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) Die Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Um das obige Beispiel der/s Platzanweisers/in nochmals weiter zu entwickeln: Wenn der Platzanweiser nicht nur das Stockwerk zuordnet, sondern auch den konkreten Sitzplatz, so ist zu hoffen, dass diese Abbildung injektiv ist, da sonst zwei Leute auf dem selben Platz sitzen müssen. Der Kassenwart des Theaters hingegen hofft, dass die Abbildung von der Menge der Zuschauer auf die Menge der Sitzplätze auch surjektiv ist, da dann das Theater voll besetzt ist.

DEFINITION 7.17. Ist R eine Relation und $R \subset M \times M$, dann definieren wir

$$R^{-1} := \{(y, x) \in M \times M \mid xRy\},$$

Man nennt R^{-1} die *Umkehrung* von R.

ÜBUNG 7.18.

(a) Sei f eine funktionale Relation. Dann ist f^{-1} genau dann eine funktionale Relation, wenn f injektiv ist.
(b) Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so ist $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ genau dann eine Abbildung, wenn $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv ist.
(c) Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, so gilt $f^{-1} \circ f = \delta_X$ und $f \circ f^{-1} = \delta_Y$.

Man nennt dann $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ die *Umkehrabbildung* von $f : X \longrightarrow Y$.

ÜBUNG 7.19. Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(1) Ist $g \circ f : X \longrightarrow Z$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.
(2) Ist $g \circ f : X \longrightarrow Z$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
(3) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Umkehrung der Aussage (1) nicht gilt. Das heißt: finden Sie Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$, so dass $g : Y \longrightarrow Z$ surjektiv ist, aber nicht $g \circ f : X \longrightarrow Z$.
(4) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Umkehrung der Aussage (2) nicht gilt.

ÜBUNG 7.20. Seien X und Y Mengen, $X \neq \emptyset$. Es gibt eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ gibt.[22]

Siehe: Aufgabe 3 auf Übungsblatt 3

SATZ 7.21 (Schröder, Bernstein)**.** *Seien X und Y Mengen. Angenommen, es gibt eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ und eine injektive Abbildung $g : Y \longrightarrow X$, dann gibt es auch eine bijektive Abbildung $g : X \longrightarrow Y$.*

Beweis: 2. Übungsblatt der Linearen Algebra I

DEFINITION 7.22. Seien X und Y Mengen. Wir sagen:

- X und Y sind *gleich mächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt.
- Y ist *mächtiger* als X, falls es eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ und es keine bijektive Abbildung $b : X \longrightarrow Y$ gibt.
- X ist *endlich*, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass X und $\{m \in \mathbb{N} \mid 0 < m \leq n\}$ gleich mächtig sind. Wir schreiben dann $\#X = n$ und sagen X hat n Elemente.
- X ist *unendlich*, falls X nicht endlich ist. Wir schreiben dann $\#X = \infty$.
- X ist *abzählbar*, falls es eine injektive Abbildung $X \to \mathbb{N}$ gibt.

[22] Leider habe ich in der Vorlesung die Bedingung $X \neq \emptyset$ vergessen!

- X ist *überabzählbar*, wenn X nicht abzählbar ist. Dann ist X mächtiger als $\mathbb{N}$.

ÜBUNG 7.23. Sei M ein Mengensystem. Für $A, B \in M$ definieren wir

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig.}$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

BEISPIELE 7.24.
(1) $\#X = 0 \Longleftrightarrow X = \emptyset$.
(2) Endliche Mengen sind abzählbar (Offensichtlich).
(3) X ist abzählbar unendlich $\Longleftrightarrow$ X und $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig. (Ein Beweis benötigt vollständige Induktion, oder die Peano-Axiome oder irgend etwas, was die natürlichen Zahlen charakterisiert.)
(4) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleich mächtig (Übung: Beweisen Sie dies!). Also sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich.
(5) $\mathbb{R}$ is mächtiger als $\mathbb{N}$ (wird später bewiesen!)

!ACHTUNG!. Gilt $\#X = \infty$ und $\#Y = \infty$, so folgt daraus **nicht**, dass X und Y gleich mächtig sind.

Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $M \subset X$, so definieren wir

$$f_\#(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M : \ y = f(x)\} = \{f(x) \,\|\, x \in M\}.$$

Man nennt $f_\#(M)$ das *Bild* von M unter f. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ M & \mapsto & f_\#(M) \end{array}$$

Analog definiert man für $N \subset Y$:

$$f^\#(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}.$$

Man nennt $f^\#(N)$ das *Urbild* von N unter f. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ N & \mapsto & f^\#(N) \end{array}$$

Die funktionalen Relationen $f_\#$ bzw. $f^\#$ werden in der Literatur (und auch in der Linearen Algebra I) oft mit f bzw. f^{-1} bezeichnet. Dies kann zu Missverständnisse führen, da f und $f_\#$ verschiedene funktionale Relationen sind und da f^{-1} nur dann eine funktionale Relation ist, wenn f injektiv ist. Wir nutzen deswegen in den nächsten Wochen die Bezeichnungen $f_\#$ und $f^\#$ wie oben, um Missverständnisse zu vermeiden. Später (ab Analysis II) schreiben wir auch einfach f und f^{-1}.

ÜBUNG 7.25. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, $A, B \subset X$ und $M, N \subset Y$. Zeigen Sie

(1) $f_\#(A \cap B) \subset f_\#(A) \cap f_\#(B)$. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Teilmenge manchmal eine echte Teilmenge ist.
(2) $f_\#(A \cup B) = f_\#(A) \cup f_\#(B)$.
(3) $A \subset B \to f_\#(A) \subset f_\#(B)$.
(4) $f^\#(M \cap N) = f^\#(M) \cap f^\#(N)$.
(5) $f^\#(M \cup N) = f^\#(M) \cup f^\#(N)$.
(6) $M \subset N \to f^\#(M) \subset f^\#(N)$.
(7) $A \subset f^\#(f_\#(A))$. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Teilmenge manchmal eine echte Teilmenge ist.
(8) $f_\#(f^\#(M)) \subset M$. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Teilmenge manchmal eine echte Teilmenge ist.
(9) $f^\#(M \setminus N) = f^\#(M) \setminus f^\#(N)$

Die Aussagen (1) und (2) werden auf dem 3. Übungsblatt dieser Vorlesung bewiesen. Die Aussagen (7), (8) und (9) wurden auf dem 2. Übungsblatt der Linearen Algebra gezeigt.

8. Familien

Definition 8.1. Seien I und M Mengen. Eine *(I-indizierte) Familie von Elementen von M* ist dasselbe wie eine Abbildung von I nach M. Wenn man eine Abbildung $f : I \longrightarrow M$ als Familie interpretiert, so schreiben wir sie als $(f(i))_{i \in I}$ oder als $(f(i) \mid i \in M)$. Die Menge aller I-indizierten Familien von Elementen von M ist also $M^I = \mathrm{Abb}(I, M)$. Eine Familie $(f(i))_{i \in I}$ heißt *nicht-leer*, falls I nicht die leere Menge ist. Die Menge I heißt *Indexmenge*. Ist die Indexmenge $I := \mathbb{N}$ oder $I := \mathbb{N}_{>0}$, so nennt man die Elemente in $M^I = \mathrm{Abb}(I, M)$ oft auch *M-wertige Folgen* oder *Folgen in M*.

Beispiele 8.2. (a) Eine (reell-wertige) Folge ist definiert als $\mathbb{N}$-indizierte Familie von reellen Zahlen. Eine solche Folge ist also eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, die wir als $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ schreiben. Alternativ darf man diese Folge auch in der Form $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ schreiben.

(b) Sei M eine Menge. Ein k-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in M^k$ definiert dann die Familie $(a_j)_{j \in \{1,2,\ldots,k\}}$. Wir erhalten eine bijektive Abbildung $F : M^k \longrightarrow M^{\{1,\ldots,k\}}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto (a_j)_{j \in \{1,2,\ldots,k\}}$. Die Elemente von M^k wurden ganz anders „definiert“ als die Elemente von $M^{\{1,\ldots,k\}}$. Dennoch haben die Elemente von M^k und die von $M^{\{1,\ldots,k\}}$ nahezu identische Eigenschaften: beide sind durch eine geordnete Liste mit k Elementen von M beschreibbar. Damit uns die Formalien nun nicht erdrücken, ist es nun sinnvoll so zu tun, als wäre $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ dasselbe wie $(a_j)_{j \in \{1,2,\ldots,k\}}$. Man sagt dazu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ wird mit $(a_j)_{j \in \{1,2,\ldots,k\}}$ identifiziert. Dadurch identifizieren wir auch automatisch M^k mit $M^{\{1,\ldots,k\}}$. Um zu unterstreichen, dass dieses Identifizieren von obigem F abhängt sagen wir: *wir identifizieren M^k mit $M^{\{1,\ldots,k\}}$ vermöge F*. Wer das Wort „vermöge“ nicht mag, kann auch „mit Hilfe von“ sagen. [23]

[23] Es stellt sich hier unweigerlich die Frage, wieso wir nicht gleich Elemente in $M \times M$ als Abbildungen von $\{1, 2\} \longrightarrow M$ definiert haben. Dies geht aber leider nicht, da wir zur Einführung von Abbildungen bereits wissen mussten, was ein Paar und was ein kartesisches Produkt ist.

(c) Die Basis eines Vektorraums ist eine Familie von Vektoren, die linear unabhängig sind und den Vektorraum erzeugen.

Bemerkung 8.3. Wenn Sie eine ähnliche Aussage oder Definition wie das obige (b) in der Schule gesehen haben, so stand dort wahrscheinlich nicht eine „Familie von Vektoren“, sondern eine „Menge von Vektoren“. Dies ist aber aus mehreren Gründen problematisch, z.B. erhalten wir mit dieser Mengendefinition, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Man beachte, dass $\mathcal{B}$ genau zwei Elemente enthält, da zwischen obigen Mengenklammern zweimal derselbe Vektor steht.
Die Aussage

„Seien v_1 und v_2 Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ genau dann wenn $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig sind.“

ist falsch, denn im Fall $v_1 = v_2 \neq 0$ ist $\{v_1, v_2\} = \{v_1\}$ und somit linear unabhängig. Aber $\{v_1\}$ ist keine Basis von $\mathbb{R}^2$. Korrekt ist hingegen die Aussage:

„Seien v_1 und v_2 Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $(v_i)_{i\in\{1,2\}}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ genau dann wenn $(v_i)_{i\in\{1,2\}}$ linear unabhängig ist.“

Anschaulich gilt: Familien registrieren Mehrfachnennungen. Über $\{1, 2 \ldots, k\}$ oder über $\mathbb{N}$ indizierte Mengen registrieren auch die Ordnung der Elemente.

Definition 8.4. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, (d.h. jedes M_i ist eine Menge), so definieren wir

$$\bigcup(M_i \mid i \in I) := \bigcup\{M_i \mid i \in I\} = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

und falls $(M_i)_{i\in I}$ nicht-leer ist

$$\bigcap(M_i \mid i \in I) := \bigcap\{M_i \mid i \in I\} = \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}.$$

Wir schreiben auch $\bigcup_{i\in I} M_i$ für $\bigcup(M_i \mid i \in I)$ und $\bigcap_{i\in I} M_i$ für $\bigcap(M_i \mid i \in I)$.

Kartesische Produkte von Mengenfamilien.
Wir haben bereits M^k mit $M^{\{1,\ldots,k\}}$ identifiziert. Die Elemente von $M^{\mathbb{N}}$ sind also eine Art „unendliches kartesisches Produkt“. Solche Produkte sind seit Ende des 19. Jahrhunderts in vielen Bereichen der Mathematik ganz wichtig. Dieser Begriff soll deswegen präzisiert werden. Wir wollen auch gleich Produkte in der Form $M_1 \times M_2 \times \ldots$ zulassen, d.h. die M_i (genannt Faktoren) dürfen verschieden sein.

Definition 8.5 (Kartesische Produkte von Mengenfamilien). Gegeben sei eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Mengen, d.h. gegeben sei eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine Menge M_i. Wir definieren zunächst $M := \bigcup_{i\in I} M_i$. Das *kartesische Produkt der Familie* $(M_i)_{i\in I}$ ist definiert als

$$\prod_{i\in I} M_i := \left\{(m_i)_{i\in I} \in M^I \mid \forall i \in I : \, m_i \in M_i\right\}$$

Beispiele 8.6. $\prod_{i\in I} M = M^I$

Analog zu Beispiele 8.2 (b) kann man $\prod_{i\in\{1,\ldots,k\}} M_i$ mit $M_1 \times \cdots \times M_k$ identifizieren.

Ein M_i in der obigen Definition nennt man den *i-ten Faktor* oder die *i-te Komponente*. Für ein fixiertes $i_0 \in I$ nennt man die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \prod_{i\in I} M_i & \longrightarrow & M_{i_0} \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & m_{i_0} \end{array}$$

die *i_0-te kanonische Projektion.*

Literatur für das bisherige Kapitel

Das Buch [**12**] ist eine recht ausführliche und leicht lesbare Einführung in die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik. Das Buch [**17**] ist deutlich kürzer und beschränkt sich mehr auf das wesentliche, aber für manche Anfänger vielleicht etwas zu dicht geschrieben. Es fokussiert sich auch mehr auf besonders interssante Aspekte. Die wichtigsten Begriffe in Kürze finden sich auch im Buch von D. Grieser [**18**], das auf dem Skript seiner Analysis-Vorlesung [**19**] aufbaut. Weitere Literatur ist das Buch von Halmos in einer deutschen und englischen Fassung [**20**]. Einen deutlich tiefer gehenden Einstieg in die Mengenlehre findet man in [**13**].

KAPITEL 2

Zahlen

2.11.

Ab jetzt schreiben wir $\to$ oder $\longrightarrow$ für Abbildungen, statt wie bisher das rote Symbol $\longrightarrow$ zu verwenden. Wir schreiben $\{f(x) \mid x \in M\}$ statt $\{f(x) \,\|\, x \in M\}$. Die exakte Bedeutung kann man aus dem Kontext heraus ablesen.

Der einleitende Teil der Vorlesung ist nun beendet und wir — Professoren, Mitarbeiter, Tutoren **und die Hörer der Vorlesung** — sollten uns bemühen, ab jetzt deutlich rigorosere Begründungen zu geben. Wenn aus Zeitgründen nicht alles bewiesen werden kann, so müssen wir klar darstellen, wo genau wir kleinere Lücken lassen, und andeuten, wie diese geschlossen werden können (Eigenes Nachdenken, Anhang, Literatur, Zentralübung, Übungsblätter, etc.).

1. Die natürlichen Zahlen

Die Axiome für die natürlichen Zahlen bilden die Peano-Axiome, benannt nach dem italienischen Mathematiker Guiseppe Peano (1858–1932).

Axiome 1.1 („Axiome“ der natürlichen Zahlen (Peano-Axiome))**.** *Die natürlichen Zahlen bestehen aus*

- *einer Menge* $\mathbb{N}$,
- *einem (ausgewählten) Element in* $\mathbb{N}$, *das wir* 0 *nennen,*
- *und einer Abbildung* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto s(x)$, *genannt die* Nachfolger-Abbildung.

Wir fordern, dass hierfür folgenden Eigenschaften, genannt die Peano-Axiome, erfüllt sind:

(P1) $0 \notin B(s)$ *(das heißt:* 0 *ist nicht im Bild von* s*)*
(P2) Die Abbildung $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *ist injektiv.*
(P3) (Induktionsaxiom) Erfüllt $T \subset \mathbb{N}$ *die Bedingungen* $0 \in T$ *und* $s_{\#}(T) \subset T$, *dann gilt bereits* $T = \mathbb{N}$.

Alles, was Sie über die natürlichen Zahlen kennen, kann man darauf aufbauen, zum Beispiel Addition, Multiplikation und Exponieren von natürlichen Zahlen, die bekannten Gesetze (zum Beispiel: Kommutativität von Addition und Multiplikation, Assoziativität von Addition und Multiplikation, Distributivgesetz, Potenzgesetz) kann man daraus herleiten. Da dies in der Linearen Algebra

I detailiert besprochen werden soll, werden wir dies in der Analysis I nur erwähnen. Für Details verweisen wir auch auf Anhang B, der manche dieser Aspekte ausführt.

Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert man eine Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ wie folgt: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gelte:

$$n \leq m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \; n + k = m.$$

Dies ist eine totale Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$, was auch ein paar hier nicht ausgeführte Beweise erfordert, wenn man alles von Grund auf beweist.[1] Ferner definiert man

$$\begin{aligned} n \geq m &:\Longleftrightarrow m \leq n \\ n < m &:\Longleftrightarrow n \leq m \wedge \neg n = m \\ n > m &:\Longleftrightarrow m < n \end{aligned}$$

Aus den Peano-Axiomen leitet man zwei wichtige Sätze her: den Satz über vollständige Induktion und den Dedekindschen Rekursionssatz, beide werden in Anhang B bewiesen.

Satz 1.2 (Dedekindscher Rekursionssatz)**.** *Sei M eine Menge, $a \in M$ und $g : M \times \mathbb{N} \longrightarrow M$ eine Abbildung.*[2] *Dann gibt es genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ so dass $f(0) = a$ und*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; f(n+1) = g(f(n), n).$$

Wenn man alles sauber aufbauen will, so sind zunächst die Summe $+$, das Produkt $\cdot$ und das Exponieren durch den Rekursionssatz zu definieren, siehe Anhang B. Wir wollen diese Operationen aber als gegeben voraussetzen.

Beispiel 1.3 (Definition der Fakultät). Wir setzen $M := \mathbb{N}$, $a = 1$ und $g(m, n) := (n+1) \cdot m$. Dann nennt man die Abbildung f, die uns Satz 1.2 liefert, die Fakultät. Wir schreiben $n!$ statt $f(n)$. Klammerkonvention: ! wird vor $+$ und $\cdot$ ausgeführt. Somit ist $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die einzige Funktion, die die Eigenschaften

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n! &= n \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

erfüllt. Es gilt somit $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots, n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.

Beispiel 1.4 (Summen- und Produktsymbole). Oft ist es wichtig, Ausdrücke der Form

$$a_1 + \ldots + a_n$$

exakt zu beschreiben. Hierzu führen wir ein Symbol $\sum_{j=1}^{n}$ ein. Man definiert rekursiv

$$\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$$

[1] Wird vielleicht noch als Anhang nachgeliefert.

[2] Man schreibt hier und immer in vergleichbaren Situationen dann $g(m, n)$ statt $g((m, n))$.

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j := \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) + a_{n+1}.$$

Dann ist[3]

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n.$$

Analog hierzu

$$\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j=1}^{n+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right) \cdot a_{n+1}.$$

Insbesondere gilt also $n! = \prod_{j=1}^{n} j$.

Wir nutzen[4] auch folgende Verallgemeinerung: Es seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und es gelte $k \leq n+1$. Dann definiert man

$$\sum_{j=k}^{n} a_j := \sum_{j=1}^{n-k+1} a_{j+k-1} = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n, \qquad \prod_{j=k}^{n} a_j := \prod_{j=1}^{n-k+1} a_{j+k-1} = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Satz 1.5 (Vollständige Induktion)**.** *Sei $A(\,\cdot\,)$ eine auf $\mathbb{N}$ definierte Aussageform. Wir setzen voraus, dass Induktionsanfang und Induktionsschritt erfüllt sind:*
Induktionsanfang*: $A(0)$ ist wahr.*
Induktionsschritt*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(A(n) \Longrightarrow A(n+1))$.*
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$.

Im Induktionsschritt nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung*.

Beispiel 1.6. Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage wahr ist

$$A(n): \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n\,(n+1).$$

Induktionsanfang $n = 0$

Für $n = 0$ steht auf der linken Seite (l.S.) nach Definition $\sum_{j=1}^{n} j = 0$.

Auf der rechten Seite (r.S.) haben wir $\frac{1}{2} 0\,(0+1) = 0$. Somit l.S. = r.S..

[3]Dies ist genau genommen keine Aussage, sondern die Definition des Ausdrucks $a_1 + \ldots + a_n$, der bisher nicht so klar definiert war, da die Bedeutung der Punkte unklar blieb.

[4]Solange wir $\mathbb{Z}$ noch nicht eingeführt haben, sollte man $k, n \in \mathbb{N}$ annehmen.

Deswegen ist $A(0)$ wahr.

Induktionsschritt von n auf $n+1$

Nach Induktionsvorraussetzung gilt bereits die Aussage $A(n)$, also

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n\,(n+1).$$

Zu zeigen ist $A(n+1)$, also die Aussage

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{1}{2}(n+1)\,\big((n+1)+1\big).$$

Wir berechnen die linke Seite:

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) + (n+1) = \frac{1}{2} n\,(n+1) + (n+1) = \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2}) = \frac{1}{2}(n+2)\,(n+1).$$

Wir berechnen die rechte Seite:

$$\frac{1}{2}(n+1)\,\big((n+1)+1\big) = \frac{1}{2}(n+1)\,(n+2).$$

Also wieder l.S. = r.S..

Damit haben wir gezeigt, dass $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgt.

Schlussfolgerung (wird normalerweise nicht mehr aufgeschrieben, da es bei jeder vollständigen Induktion immer dasselbe Argument ist)

Die Voraussetzungen von Satz 1.5 sind also erfüllt, deswegen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$. □

Beispiel 1.7 (Geometrische Summe). Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (oder $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ oder $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ oder in irgendeinem unitären Ring R, so dass $(1-q)^{-1}$ existiert).

Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage wahr ist

$$A(n):\ \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit $1-q$ und erhalten daraus die zu $A(n)$ äquivalente Aussageform

$$\tilde{A}(n):\ (1-q)\sum_{j=0}^{n} q^j = 1 - q^{n+1},$$

die wir durch Induktion über n zeigen wollen.

Induktionsanfang $n = 0$

Für $n = 0$ rechnen wir

$$(1-q)\sum_{j=0}^{0} q^j = (1-q)q^0 = (1-q)\,1 = 1-q^1 = 1-q^{0+1}.$$

Deswegen ist $\tilde{A}(0)$ wahr.

Induktionsschritt von n auf $n+1$

Nach Induktionsvorraussetzung gilt bereits die Aussage $\tilde{A}(n)$, also

$$(1-q)\sum_{j=0}^{n} q^j = 1-q^{n+1}.$$

Zu zeigen ist $\tilde{A}(n+1)$, also die Aussage

$$(1-q)\sum_{j=0}^{n+1} q^j = 1-q^{(n+1)+1}.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{j=0}^{n+1} q^j &= (1-q)\left(\left(\sum_{j=0}^{n} q^j\right) + q^{n+1}\right) = \underbrace{(1-q)\left(\sum_{j=0}^{n} q^j\right)}_{=1-q^{n+1}} + (1-q)\,q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2} = 1-q^{n+2}.\end{aligned}$$

Also haben wir $\tilde{A}(n+1)$ gezeigt. □

Auch die folgenden elementaren Gesetze der natürlichen Zahlen müssen bei einem logisch vollständigen Aufbau durch vollständige Induktion gezeigt werden. Genau genommen, lange bevor wir obige Beispiele diskutieren können. Aus Zeitgründen werden wir dies nicht ausführen, sondern ebenfalls wieder auf Anhang B des Skripts verweisen.

Satz 1.8. $(\mathbb{N},+,\cdot)$ *erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(Aa) ***Addition ist assoziativ.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

(An) ***Addition hat neutrales Element.***
Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $x \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$x+0 = 0+x = x.$$

(Diese Null ist unsere bisherige!)

(Ak) ***Addition ist kommutativ.***
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

(Ma) ***Multiplikation ist assoziativ.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(Mn) ***Multiplikation hat neutrales Element.***
Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(Diese Eins ist unsere bisherige!)

(Mk) ***Multiplikation ist kommutativ.***
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(AMd) ***Addition und Multiplikation erfüllen das Distributivgesetz.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Eine weitere elementare Eigenschaft von $\mathbb{N}$, die in der Linearen Algebra gezeigt wurde, ist die Wohlordnung von $\mathbb{N}$. Einen Beweis findet man in Anhang B, wo der Satz nochmals als Proposition 3.3 wiederholt ist.

Satz 1.9 (Wohlordnung von $\mathbb{N}$)**.** *Jede nicht-leere Teilmenge T von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Hierbei nennen wir y ein *Minimum* von $\mathbb{N}$, falls $y \in T$ und $\forall x \in T : y \leq x$. Wenn eine Menge mit Ordungsrelation ein Minimum besitzt, so ist dieses eindeutig; diese Eindeutigkeit folgt direkt aus der Antisymmetrie. Falls ein Minimum y in M existiert, so schreiben wir $y = \min M$. Wir erhalten analog die Definition eines *Maximums*, wenn $y \leq x$ durch $y \geq x$ ersetzen, und schreiben dann $y = \max M$.

Satz 1.10. *Ist M eine abzählbar unendliche Menge, dann sind M und $\mathbb{N}$ gleich mächtig.*

Beweis. Da M abzählbar ist, gibt es eine injektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$. Wir definieren $Q := f_\#(M)$. Da f injektiv ist, ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & Q \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

bijektiv. Also sind M und Q gleich mächtig. Zu zeigen bleibt, dass Q und $\mathbb{N}$ gleich mächtig sind.

Zeichnung mit Q in $\mathbb{N}$ und der Abbildung g, die das nächsthöhere Element sucht.

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$:

$$Q_{>k} := \{x \in Q \mid x > k\}.$$

Behauptung: $\forall k \in \mathbb{N} : Q_{>k} \neq \emptyset$.

Begründung: Angenommen $Q_{>k} = \emptyset$, dann wäre $Q \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, also wäre Q und somit N endlich. Widerspruch.

Wir definieren $g : Q \longrightarrow Q$ als

$$g(k) := \text{das Minimum von } Q_k.$$

Die Funktion ist wohldefiniert wegen Satz 1.9. Aus der Definition von g ergibt sich insbesondere $g(k) > k$.

Definiere rekursiv mit Hilfe des Dedekindschen Rekursionssatzes die Funktion $h : \mathbb{N} \to Q$ durch

$$h(0) := \text{das Minimum von } Q,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : \ h(n+1) := g(h(n)).$$

Somit gilt $h(n+1) > h(n)$, und deswegen zeigt man leicht (durch eine weitere vollständige Induktion), dass $h : \mathbb{N} \to Q$ injektiv ist.[5] Da die Inklusion $Q \to \mathbb{N}$ injektiv ist, folgt aus dem Satz 7.21 von Schröder-Bernstein, dass Q und $\mathbb{N}$ gleich mächtig sind. $\square$

2. Etwas Kombinatorik

Um den Umgang mit natürlichen Zahlen zu üben, zeigen wir einige Aussagen, die in der Kombinatorik wichtig sind.

Satz 2.1. *Für endliche Mengen N und Q gilt $(\#N) \cdot (\#Q) = \#(N \times Q)$.*

Beweis.

Sei also $s := \#N$ und $t := \#Q$. Es gibt also bijektive Abbildung $\varphi : N \to \{1, 2, \ldots, s\}$ [6] und $\psi : N \to \{1, 2, \ldots, t\}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi \times \psi : N \times Q & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, s\} \times \{1, 2, \ldots, t\} \\ (n, q) & \mapsto & (\varphi(n), \psi(q)) \end{array}$$

bijektiv und man zeigt auch sofort, dass

$$\begin{array}{rcl} p : \{1, 2, \ldots, s\} \times \{1, 2, \ldots, t\} & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, ts\} \\ (a, b) & \mapsto & a + s(b-1) \end{array}$$

bijektiv ist. Also

$$\#(N \times Q) = \#(\{1, 2, \ldots, s\} \times \{1, 2, \ldots, t\}) = \#(\{1, 2, \ldots, ts\}) = ts.$$

[5] Die Abbildung $h : \mathbb{N} \to Q$ ist sogar bijektiv, aber wir benötigen dies im folgenden nicht.

[6] Hier gilt immer: $\{1, 2, \ldots, s\} := \{r \in \mathbb{N} \mid 0 < r \leq s\}$, insbesondere ist es die leere Menge, falls $s = 0$.

□

7.11.

SATZ 2.2. *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Angenommen M hat k Elemente. Dann ist k^n die Anzahl der Elemente von $M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-mal}$.*

Der Beweis ist eine einfach Induktion, die nun jeder selbst durchführen können sollte.

Beweis. Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$A(n) : \#(M^n) = (\#M)^n.$$

Induktionsanfang $n = 1$
Offensichtlich wegen $M^1 = M$ und $k^1 = k$.

Induktionsschritt von n auf $n + 1$

$$\#(M^{n+1}) = \#(M \times M^n) = (\#M) \cdot (\#(M^n)) = (\#M) \cdot (\#M)^n = (\#M)^{n+1}$$

Hierbei folgt das erste Gleichheitsszeichen direkt aus der Definition von M^{n+1}, das zweite aus dem vorangehenden Satz, das dritte nach Induktionsvoraussetzung und das letzte aus der Definition von Potenzen in $\mathbb{N}$. $\square$

Satz 2.3. *Angenommen, eine Menge M hat $n \in \mathbb{N}$ Elemente, dann gibt es 2^n Elemente in $\mathcal{P}(M)$.*

Auch dies beweist man durch Induktion über n.

Beweis. **Induktionsanfang** $n = 0$

Die leere Menge $\emptyset$ ist die einzige Menge mit 0 Elementen. Sie hat einzige Teilmenge, nämlich $\emptyset$.

Induktionsschritt von n auf $n + 1$

Nun sei $\#M = n + 1$ und sei $x \in M$. Definiere $M' := M \smallsetminus \{x\}$.

Wir definieren $F : \mathcal{P}(M') \times \{0, 1\} \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ durch $(A, 0) \mapsto A$ und $(A, 1) \mapsto M \smallsetminus A$.

Die Umkehr-Abbildung ist

$$\begin{aligned} G : \mathcal{P}(M) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{P}(M') \times \{0, 1\} \\ B \quad &\mapsto \quad \begin{cases} (B, 0) & \text{falls } x \notin A \\ (M \smallsetminus B, 1) & \text{falls } x \in A \end{cases} \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass G die Umkehrfunktion von F ist. Also ist F bijektiv. Wir erhalten nach Induktionsvoraussetzung

$$\#\mathcal{P}(M) = \#(M' \times \{0, 1\}) \overset{Satz\ 2.1}{=} (\#M')(\#\{0, 1\}) = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

$\square$

Ähnlich zeigt man auch: sind M und N endliche Mengen, dann gilt

$$\#(\mathrm{Abb}(M, N)) = (\#N)^{(\#M)},$$

oder in der anderen Schreibweise

$$\#(N^M) = (\#N)^{(\#M)}.$$

Definition 2.4. Eine *Permutation* einer Menge M ist eine bijektive Abbildung von M nach M.

Satz 2.5. *Angenommen M hat n Elemente. Dann ist $n!$ die Anzahl der Permutationen von M.*

Interpretation: $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte anzuordnen.

Satz 2.5 ist ein Spezialfall von Satz 2.6, folgt also bereits aus Satz 2.6.

Satz 2.6. *Seien M und N endliche Mengen mit $\#M \geq \#N$. Dann ist die Anzahl der injektiven Abbildungen von N nach M gleich*

$$\frac{(\#M)!}{(\#M - \#N)!}.$$

Interpretation: $m!/(m-n)! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge von m unterscheidbaren Objekten n Objekte herauszunehmen und anzuordnen.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$ für festes $k \in N$.

$$A(n,k) : \begin{cases} \text{Gilt } \#M = n + k \text{ und } \#N = n\text{, dann gibt es} \\ (n+k)!/k! \text{ viele injektive Abbildungen } N \longrightarrow M. \end{cases}$$

Induktionsanfang $n = 0$.

Also $N = \emptyset$. Dann ist $\emptyset : \emptyset \to M$ die einzige Abbildung von N nach M. Sie ist injektiv. Andererseits gilt dann $(n+k)!/k! = k!/k! = 1$.

Induktionsschritt von n auf $n+1$.

Sei $\#N = n+1$ und $\#M = n+1+k$. Wir wählen ein $a \in N$. Es gibt $n+k+1$ Möglichkeiten, dem Element a ein Element von M zuzuweisen. Sobald festgelegt ist, dass a auf ein $b \in M$ abgebildet wird, kann noch eine injektive Abbildung von $N \setminus \{a\}$ auf $M \setminus \{b\}$ gewählt werden. Hierfür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $(n+k)!/k!$ Möglichkeiten. Somit ist die Anzahl der injektiven Abbildungen von N nach M durch

$$(n+k+1) \cdot \frac{(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)\,(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)!}{k!}$$

gegeben. $\square$

Satz 2.7. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von einer Menge mit m Elementen, $m \geq k$ ist:*

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Die oben definierte Zahl $\binom{m}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*.

Beweis. Sei N eine Teilmenge mit k Elementen von M, $m = \#M$. Die Anzahl der bijektiven Abbildungen $\{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow N$ ist $k!$. Jede solche bijektive Abbildung $\{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow N$ ergibt eine injektive Abbildung $\{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow M$, und umgekehrt ergibt jede injektive Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow M$, $x \mapsto f(x)$ eine bijektive Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow B(f)$, $x \mapsto f(x)$. Ist deswegen r die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M, dann ist $r \cdot k!$ die Anzahl der injektive Abbildungen $f : \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow M$. Nach vorigem Satz also $r \cdot k! = m!/(m-k)!$ und daraus ergibt sich

$$r = \binom{m}{k}.$$

□

Offensichtlich gilt

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

Wir setzen zudem $\binom{m}{k} := 0$ für $m, k \in \mathbb{Z}$, falls $k < 0$ oder $k > m$.

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Dann hat M wegen Satz 2.3 2^m Teilmengen. Da es $\binom{m}{k}$ Teilmengen mit k Elementen gibt, folgt:

FOLGERUNG 2.8. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$2^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

□

SATZ 2.9. *Es gelte $m, k \in \mathbb{Z}$ und $m > 0$. Dann gilt:*

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}.$$

Beweis. In den Fällen $m = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und den Fällen $k = 0$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ haben wir $\binom{m}{k} = 1$, ein Summand ist 0 und der andere 1. Die Behauptung ist trivialerweise richtig, falls $k < 0$ oder $k > m$.

In den übrigen Fällen rechnen wir

$$\begin{aligned}\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k} &= \frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-1-k+1)!}+\frac{(m-1)!}{k!\,(m-1-k)!}\\ &= \frac{k\,(m-1)!}{k\,(k-1)!\,(m-k)!}+\frac{(m-k)(m-1)!}{k!\,(m-k)\,(m-1-k)!}\\ &= \frac{(k+m-k)\,(m-1)!}{k!\,(m-k)!}\\ &= \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\end{aligned}$$

□

Pascalsches Dreieck

Bild eines Pascalschen Dreiecks

Alternativ auch hier zu sehen.

Satz 2.10 (Binomische Formel)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ oder in einem beliebigen kommutativen Ring*[7] *mit* 1*. Sei $n \in \mathbb{N}$.*

Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Hierbei nutzen wir die Definition: $x^0 = y^0 = (x+y)^0 = 1$.

Beweis. **Induktionsanfang** $n = 0$

Auf beiden Seiten steht dann 1.

[7]Wenn Sie diesen Begriff des nächsten Abschnitts noch nicht kennen, ignorieren Sie bitte diesen Fall und betrachten Sie zunächst den Fall $x, y \in \mathbb{N}$ oder $x, y \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt von $n-1$ auf n für $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)\,(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k-1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir die Induktionsvoraussetzung in der zweiten Zeile, das Distributivgesetz in der dritten, in der vierten Zeile wird im ersten Summand k durch $k+1$ ersetzt. Danach nutzen wir

$$\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0,$$

dann wieder das Distributivgesetz und letztendlich Satz 2.9.

□

3. Die ganzen Zahlen

Der nächste Schritt ist nun, die Menge der uns bekannten Zahlen Schritt für Schritt zu erweitern:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Wir wollen diese Erweiterungen durch Eigenschaften charakterisieren.

Wir schreiben

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \supset \mathbb{N}$$

für die ganzen Zahlen.[8]

Die Addition und die Multiplikation kann man zu Abbildungen

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a,b) \mapsto a+b$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

erweitern, so dass die Eigenschaften (Aa), (Ak), (An), (Ma), (Mk), (Mn) und (AMd) weiterhin gelten, wenn man dort $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ ersetzt. Außerdem gilt

(Ai) **Addition hat inverse Elemente.**
Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$, so dass

$$x + y = y + x = 0.$$

Man nennt y das Inverse von x bezüglich der Addition und schreibt normalerweise $-x$ anstelle von y.

Schreibweise

$$x - y := x + (-y).$$

Hinzu kommt eine Eigenschaft, die anschaulich besagt, dass die ganzen Zahlen „die kleinste Erweiterung" der natürlichen Zahlen sind, die diese Eigenschaften erfüllt. Präzise ausgedrückt:

(MEZ) **Minimale Erweiterung.**
Ist T eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{N} \subset T$ und gilt

$$\forall x, y \in T : \ x + y \in T$$

und

$$\forall x \in T : \ -x \in T,$$

dann gilt bereits $T = \mathbb{Z}$.

Auch die Ordnung $\leq$ setzt sich auf $\mathbb{Z}$ fort und die Eigenschaften (1)–(5) in Lemma 3.1in Anhang B.3 gelten weiter.

Eine mit Addition und Mulitplikation versehene Menge, die die Eigenschaften (Aa), (Ak), (An), (Ai), (Ma), und (AMd) erfüllt, nennt man *Ring*. Gilt zusätzlich (Mn), so spricht man von einem *Ring mit Eins*. Ein Ring, der zusätzlich (Mk) erfüllt, nennt man einen *kommutativen Ring.*

Somit ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Ring $(R, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$, der die natürlichen Zahlen enthält [9] und (MEZ) erfüllt, stimmt „im wesentlichen" mit den ganzen Zahlen überein. Präziser: es gibt eine bijektive Abbildung $b : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ mit

[8]Wir wollen wiederum $\mathbb{Z}$ nur durch charakterisierende Eigenschaften beschreiben, aber kein Modell konstruieren, das diese Eigenschaften erfüllt. Ein derartige Modell kann man zum Beispiel konstruieren in dem man auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Äquivalenzrelation $(m,n) \sim (a,b) \iff m + b = n + a$ einführt; dann sind die Element von $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen dieser Relation. Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man aus den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren. Diese beiden Konstruktion sollen in der Linearen Algebra erklärt werden.

[9]Gemeint ist hier: als Unterring enthält, das heißt es wird gefordert, dass sich die bereits auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiterten Operatoren $+$ und $\cdot$ sich zu $\widetilde{+}$ und $\widetilde{\cdot}$ fortsetzen.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \; b(x+y) = b(x) \widetilde{+} b(y) \text{ und } b(x \cdot y) = b(x) \widetilde{\cdot} b(y).$$

Solche eine bijektive Abbildung, die Addition und Multiplikation erhält, nennt man einen *(Ring)-Isomorphismus* oder *Isomorphismus von Ringen*. Wir sagen: $(R, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ ist *isomorph (als Ring)* zu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und schreiben $(R, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

NOTATION. Den Ring der ganzen Zahlen schreiben wir zumeist als $\mathbb{Z}$ an Stelle von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, da die Addition und die Multiplikation aus dem Kontext heraus klar sind.

4. Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen sind[10]

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{z}{n} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}.$$

Hierbei gilt

$$\frac{z}{n} = \frac{y}{m} \iff zm = yn.$$

Die Addition und die Multiplikation setzen sich zu Abbildungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

fort, und die Eigenschaften (Aa), (Ak), (An), (Ai), (Ma), (Mk), (Mn) und (AMd) gelten weiterhin für $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Außerdem gilt

(Mi) **Multiplikation hat inverse Elemente.**
Zu jedem $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Q}$, so dass

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Man nennt y das Inverse von x bezüglich der Multiplikation und schreibt normalerweise x^{-1} anstelle von y. **9.11.**

Anschaulich: $\mathbb{Q}$ ist die kleinste Erweiterung von $\mathbb{N}$, die diese Eigenschaften hat.
Präzise Bedeutung:

(MEQ) **Minimale Erweiterung.**
Ist T eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{N} \subset T$ und gilt

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in T : \; x - y \in T \\ &\forall x \in T : \forall x \in T \setminus \{0\} : \; x \cdot y^{-1} \in T, \end{aligned}$$

[10] An dieser Stelle müsste eigentlich gesagt werden, wie $\frac{z}{n}$ definiert ist. Dies wurde in der Linearen Algebra diskutiert und wird deswegen hier nicht erklärt.

dann gilt bereits $T = \mathbb{Q}$.

Auch die Ordnung setzt sich fort. Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist total.

Mit Addition und Multiplikation versehene Mengen mit mindestens 2 Elementen nennt man *Körper*, falls die Eigenschaften (Aa), (Ak), (An), (Ai), (Ma), (Mk), (Mn), (Mi) und (AMd) erfüllt sind.

Also ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper. Wie bei den ganzen Zahlen schreiben wir oft $\mathbb{Q}$ für $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Jeder Körper, der die natürlichen Zahlen enthält und (MEQ) erfüllt, ist isomorph zum Körper der rationalen Zahlen.

In jedem Körper K gilt $0 \neq 1$. Denn angenommen, wir hätten $0 = 1$, so folgt für alle $x \in K$: $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Also $K = \{0\}$. Dies widerspricht der Forderung, dass K mindestens zwei Elemente hat.

Übung 4.1. Versehe $F_2 := \{0, 1\}$ mit der folgenden Addition und Multiplikation:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zeigen Sie, dass $(F_2, +, \cdot)$ ein Körper ist. Man nennt ihn den *Körper mit* 2 *Elementen*. Ist $(\widetilde{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ ein Körper, und hat $\widetilde{K}$ genau zwei Elemente, dann ist $(\widetilde{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ isomorph zu $(F_2, +, \cdot)$.

Die Ordnung auf $\mathbb{Z}$ setzt sich zu einer Ordnung auf $\mathbb{Q}$ wie folgt fort:

Wir definieren zunächst, wann eine Zahl größer oder gleich Null ist. Für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definiere

$$0 \leq \frac{m}{n} \quad :\Longleftrightarrow \quad 0 \leq m \cdot n$$

Dann definieren wir die Relation $\leq$ für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$a \leq b :\Longleftrightarrow 0 \leq b - a\,.$$

5. Geordnete Körper

Definition 5.1. Ein *geordneter Körper* ist ein Quadrupel $(K, +, \cdot, \leq)$, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper,
(b) $\leq$ ist eine totale Ordnung auf K,
(c) $\forall x, y, z \in K : (x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z)$,
(d) $\forall x, y, z \in K : ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$.

Beispiel 5.2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein geordneter Körper.

Nicht-Beispiel: Sei $(F_2, +, \cdot)$ der Körper mit zwei Elementen aus Übung 4.1. Dann gibt es **keine** totale Ordnung $\leq$ auf F_2, so dass $(F_2, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist. Vergleiche Übungsblatt 4, Aufgabe 3.

Im Rest dieses Abschnitts sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Notation 5.3.

$$\begin{aligned}
x < y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(y \leq x) \\
x \geq y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y \leq x \\
x > y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y < x \\
x \text{ ist positiv} \quad &:\Longleftrightarrow \quad x > 0 \\
x \text{ ist negativ} \quad &:\Longleftrightarrow \quad x < 0 \\
K_{\leq a} \quad &:= \quad \{x \in K \mid x \leq a\}
\end{aligned}$$

$K_{\geq a}$, $K_{<a}$, $K_{>a}$ analog.

Übung 5.4. Seien $a, x, y, z \in K$. Zeigen Sie, dass aus den Eigenschaften (a)–(d) der obigen Definition folgt:

(a) a ist genau dann positiv, wenn $-a$ negativ ist.
(b) $1 > 0$
(c) Ist $z > 0$, dann auch $z^{-1} > 0$.
(d) Ist $z < 0$, dann gilt auch $z^{-1} < 0$ und dann gilt für alle $x, y \in K$:

$$x \leq y \quad \leftrightarrow \quad x \cdot z \geq y \cdot z.$$

Beweis: Teile (a) und (b) sind Teil von Übungsblatt 4, Aufgabe 2. Teile (c) und (d) sind ähnlich zu zeigen.

Zu (c): Sei nun $z > 0$. Wir zeigen durch Widerspruch $z^{-1} > 0$. Wir nehmen hierzu an, dass $z^{-1} \leq 0$. Dann folgt mit Lemma 5.1 (d)

$$1 = z^{-1}z \leq 0,$$

was offensichtlich $1 > 0$ widerspricht.

Zu (d): $z < 0 \Longleftrightarrow z^{-1} < 0$ ist nun offensichtlich und man zeigt (d) durch Multiplikation mit $-z$ bzw. $-z^{-1}$ unter Verwendung von Lemma 5.1 (d). □

Wir definieren rekursiv eine Abbildung $i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow K$, $0_{\mathbb{N}} \mapsto 0_K$, $i_{\mathbb{N}}(n+1) = i_{\mathbb{N}}(n) + 1$.

Lemma 5.5.

(a) $i_{\mathbb{N}}$ *erhält Addition und Multiplikation, d.h. für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$i_{\mathbb{N}}(n+m) = i_{\mathbb{N}}(n) + i_{\mathbb{N}}(m) \qquad i_{\mathbb{N}}(n \cdot m) = i_{\mathbb{N}}(n) \cdot i_{\mathbb{N}}(m) \tag{5.6}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_{>0} : i_{\mathbb{N}}(n) > 0$,
(c) $i_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow K$ *ist injektiv,*

Beweis.

(a) durch Induktion über $m \in \mathbb{N}$.
(b) und (c) sind Teil von Übungsblatt 4, Aufgabe 2.

Sprechweise Wenn die Gleichungen (5.6) gelten, sagen wir: $i_{\mathbb{N}}$ erhält Addition und Multiplikation.

Lemma 5.7. *Sei* $(K, +, \cdot, \leq)$ *ein geordneter Körper. Dann gibt es eine injektive Abbildung* $i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow K$, *die* $i_{\mathbb{N}}$ *fortsetzt (das heißt:* $i_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{N}} = i_{\mathbb{N}}$*) und so dass* $i_{\mathbb{Q}}$ *Addition und Multiplikation erhält. Außerdem erhält* $i_{\mathbb{Q}}$ *die Ordnung, das heißt es gilt für* $a, b \in \mathbb{Q}$

$$a \leq b \Longleftrightarrow i_{\mathbb{Q}}(a) \leq i_{\mathbb{Q}}(b).$$

Beweisskizze: Für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir

$$i_{\mathbb{Q}}\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{i_{\mathbb{N}}(m)}{i_{\mathbb{N}}(n)}$$
$$i_{\mathbb{Q}}\left(\frac{-m}{n}\right) := -\frac{i_{\mathbb{N}}(m)}{i_{\mathbb{N}}(n)}$$
$$i_{\mathbb{Q}}\left(\frac{0}{n}\right) := 0$$

Man muss nun zeigen, dass diese Definition Sinn ergibt. Wir dürfen einer rationalen Zahl nicht zwei verschiedene Werte zuweisen. Zu überprüfen ist hierzu

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{i_{\mathbb{N}}(m)}{i_{\mathbb{N}}(n)} = \frac{i_{\mathbb{N}}(p)}{i_{\mathbb{N}}(q)}$$

für alle $m, n, p, q \in \mathbb{N}_{>0}$. Die entsprechenden Aussagen sind für $m \leq 0$, $p \leq 0$ zu überprüfen. Man sagt dann, die Abbildung $i_{\mathbb{Q}}$ ist *wohldefiniert*. Danach kann man die anderen Eigenschaften leicht beweisen.

Wir identifizieren nun $\mathbb{Q}$ mit $B(i_{\mathbb{Q}})$ vermöge $i_{\mathbb{Q}}$, das heißt wir machen keinen Unterschied mehr zwischen $r \in \mathbb{Q}$ und $i_{\mathbb{Q}}(r) \in K$.

Definition 5.8. Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ heißt *archimedisch geordneter Körper*, [11] falls

$$\forall a \in K : \exists n \in \mathbb{N} : a \leq n.$$

[11] Man sagt manchmal auch: Der Körper erfüllt das *archimedische Axiom*. Diese Sprechweise vermeiden wir aber, da die archimedische Eigenschaft in dem von uns gewählten Zugang kein Axiom ist.

Beispiele 5.9. (a) $\mathbb{Q}$ ist archimedisch: Man zeigt leicht für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$: $\frac{m}{n} \leq m$ und $-\frac{m}{n} \leq m$ und $\frac{0}{n} \leq 1$.

(b) In Satz 6.6 werden wir zeigen, dass jeder geordnete Körper, der die Supremumseigenschaft erfüllt, archimedisch ist. Insbesondere: Sobald wir wissen, „was $\mathbb{R}$ ist“, wissen wir auch, dass $\mathbb{R}$ archimedisch geordnet ist.

(c) Sei dann K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ mit der Addition, Multiplikation und Ordung von $\mathbb{R}$. Dann ist auch K ein archimedisch geordneter Körper. Zum Beispiel für $q \in \mathbb{Q}_{>0}$:

$$K := \mathbb{Q}[\sqrt{q}] := \{a + b\sqrt{q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(d) Der *Körper der rationalen Funktionen* mit *rationalen Koeffizienten* [12]

$$K := \left\{ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \;\middle|\; p \text{ und } q \text{ sind Polynome mit rationalen Koeffizienten, } q \neq 0 \right\}.$$

Wir definieren Addition und Multiplikation wie bei den rationalen Zahlen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} := \frac{p(x)\tilde{q}(x) + \tilde{p}(x)q(x)}{q(x) \cdot \tilde{q}(x)} \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} := \frac{p(x) \cdot \tilde{p}(x)}{q(x) \cdot \tilde{q}(x)}.$$

Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein Polynom p wie oben schreiben wir im Fall $p \neq 0$ als $p(x) = a_{0,p} + a_{1,p}x + a_{2,p}x^2 \ldots + a_{k,p}x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $a_{k,p} \neq 0$. Dann heißt $\deg(p) := k \in \mathbb{N}_0$ der *Grad des Polynoms*. Wir definieren nun

$$P := \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \in K \;\middle|\; a_{\deg(p),p} \cdot a_{\deg(q),q} > 0 \right\}$$

Weiter definieren für $r, s \in K$:

$$r < s \quad :\Longleftrightarrow \quad s - r \in P.$$

Zu zeigen, dass $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist, ist einige Arbeit, aber nicht sehr schwierig.

Angenommen, der Körper wäre archimedisch geordnet. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n < n+1$. Dann wäre also $x-(n+1) < 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $x-(n+1) = \frac{x-(n+1)}{1} \in P$. Also ist dieser geordnete Körper nicht archimedisch.

Sei weiterhin $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

---

[12] Was wird hier eigentlich mit $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ gemeint? Dies ist etwas subtil, es gibt verschiedene Möglichkeiten. 1.) Man kann es als Abbildung von $\mathbb{Q} \setminus q^{\#}(\{0\})$ nach $\mathbb{Q}$ auffassen, falls p und q keine gemeinsamen Nullstellen haben. Bei dieser Interpretation muss man den Definitionsbereich bei Addition und Multiplikation in naheliegnder Art und Weise evtl. durch einzelne Punkte ergänzen. 2.) Sobald wir die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ kennen, könnte man es in ähnlicher Weise auch als Abbildung $\mathbb{R} \setminus q^{\#}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ oder als Abbildung $\mathbb{C} \setminus q^{\#}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{C}$ auffassen, auch Kombinationen wie $\mathbb{Q} \setminus q^{\#}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ wären denkbar. 3.) Die mathematisch sinnvollste Interpretation des Ausdrucks ist aber eine andere (die formale Interpretation), die ich leider derzeit noch nicht erklären kann, und die Sie später in der Linearen Algebra kennen lernen werden. Da wir Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben, ist es gar nicht so wichtig, wie wir den Ausdruck formal nun verstehen wollen. Wenn die Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ durch Koeffizienten in einem endlichen Körper (wie zum Beispiel F_2) ersetzt werden, ist dieser Unterschied aber ganz erheblich.

Definition 5.10. Die *Betragsfunktion* $|\cdot|: K \longrightarrow K$ ist definiert durch

$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

Man nennt $|a|$ auch den *Absolutbetrag* von a.

Lemma 5.11.

(a) $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$;
(b) $|-a| = |a|$;
(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ *falls* $b \neq 0$;
(d) $|a^2| = |a|^2 = a^2 \geq 0$
(e) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
(f) $|a_1 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + \cdots + |a_k|$;
(g) $|a - b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$

Beweis. (a)-(d) folgen direkt aus den Definitionen 5.1 und 5.10.
(e): $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$ ergeben $\pm(a + b) \leq |a| + |b|$.
(f): durch Induktion.
(g): Wir setzen $\tilde{a} := a - b$. Dann gilt

$$|\underbrace{\tilde{a} + b}_{a}| \leq |\tilde{a}| + |b| = |a - b| + |b|$$

Also

$$|a - b| \geq |a| - |b| \tag{5.12}$$

Durch Vertauschen von a und b erhalten wir

$$|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|. \tag{5.13}$$

Aus (5.12) und (5.13) erhalten wir das zu Beweisende. □

Satz 5.14. *Seien* $n \in \mathbb{N}_{>0}$; $a_1, \ldots, a_n \in K_{\geq 0}$ *gegeben. Dann gilt*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n.$$

Bemerkung 5.15. Wenn wir in K die n-te Wurzel ziehen können (in $\mathbb{Q}$ nicht erlaubt!), bedeutet dies

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}}_{\textit{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}_{\textit{arithmetisches Mittel}}.$$

Beweis des Satzes. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 1$ ist offensichtlich richtig.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n für $n \geq 2$:
Seien $a_1, \ldots, a_n \in K_{\geq 0}$ gegeben.
O.B.d.A. $a_1 = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_2 = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$.
$M := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$. $\Longrightarrow a_1 \leq M \leq a_2$
Wir setzen $d := a_1 + a_2 - M$. Dann

$$Md - a_1 a_2 = M\left((a_1 + a_2) - M\right) - a_1 a_2 = (a_2 - M)(M - a_1) \geq 0$$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \leq Md \tag{5.16}$$

Das arithmetische Mittel[13] von $d, a_3, a_4, \ldots, a_n$ ist M, denn

$$d + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n - M = (n-1)M.$$

Es folgt

$$a_1 a_2 \cdots a_n \overset{(5.16)}{\leq} M \underbrace{d a_3 \cdots a_n}_{\substack{\leq M^{n-1} \\ \text{nach Annahme}}} = M^n$$

□

6. Die reellen Zahlen

Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ für die Analysis eine zentrale Rolle spielen, wollen wir hier wieder formal vollständiger vorgehen.

6.1. Unzulänglichkeit von $\mathbb{Q}$.

Wieso reichen uns die rationalen Zahlen nicht aus?

Problem 1 (Algebraisch):

Sei p eine Primzahl. Dann ist $x^2 = p$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Angenommen es gäbe eine Lösung $x = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. O.B.d.A. m, n teilerfremd.

Wir erhalten $\frac{m^2}{n^2} = x^2 = p$, also $m^2 = pn^2$.

Es folgt $p|m$ und daraus $p^2|m^2 = pn^2$, was wiederum $p|n$ impliziert. Also haben wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n.

---

[13] Im Fall $n = 2$ bedeutet ist also das arithmetische Mittel von $d, a_3, \ldots, a_n$ als das artithmetische Mittel von d zu lesen, das heißt es ist d. Es git dann auch $M = d$.

Problem 2 (Geometrisch):

Bild von einem Kreis

$\pi = \dfrac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = 3,14159265... \notin \mathbb{Q}$

Wichtige geometrische Funktionen können in $\mathbb{Q}$ nicht beschrieben werden, zum

Bild: Quadrat mit Diagonale runtergedreht

Problem 3 (Physikalisch):

BILD mit Pendel

Ein Pendel bewegt sich auf einem Kreis. Dazu muss es Punkte passieren, die keine rationalen Koordinaten haben, zum Beispiel den Punkt

$$\begin{pmatrix} -\cos(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) \end{pmatrix}, \qquad \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}\,.$$

14.11

6.2. Die Supremumseigenschaft. In diesem Abschnitt werden wir eine Eigenschaft kennenlernen, die im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht gilt, aber im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zunächst ein paar Vorbemerkungen.

Wiederholung: Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge M. Sei $x \in A \subset M$.

$$x = \min A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in A:\, x \leq y.$$

(Maximum analog mit $\geq$).

Gegeben sei eine totale Ordnung auf einer endlichen Menge A, dann besitzt A ein Maximum und ein Minimum.

Definition 6.1. Sei $\leq$ eine (partielle) Ordnung auf einer Menge M. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *nach oben beschränkt* in M (bzw. *nach unten beschränkt* in M), falls es ein $r \in M$ gibt, so dass für alle $a \in A$ die Aussage $a \leq r$ (bzw. $a \geq r$) gilt. Ein solches r heißt *obere Schranke* (bzw. *untere Schranke*) von A. Wir sagen A ist *beschränkt* in M, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Besitzt die Menge

$$\overline{S}(A, M) := \{r \in M \mid r \text{ ist obere Schranke von } A\}$$

ein Minimum, so nennen wir $\min \overline{S}(A, M)$ das *Supremum* von A in M.

Besitzt die Menge

$$\underline{S}(A, M) := \{r \in M \mid r \text{ ist untere Schranke von } A\}$$

ein Maximum, so nennen wir $\max \underline{S}(A, M)$ das *Infimum* von A in M.

Kurzschreibweise $\sup A$ und $\inf A$

Beispiele 6.2. (a) $M = \mathbb{Q}$, $A = \{2, 4, 8\}$. Dann ist r obere Schranke, gdw $r \geq 8$. Und r ist untere Schranke, gdw $r \leq 2$. Wir haben $\max A = \sup A = 8$ und $\min A = \inf A = 2$.

(b) Falls A ein Maximum besitzt, so ist dieses Maximum auch das Supremum. Denn sei $a = \max A$, dann folgt

$$\overline{S}(A, M) = \{r \in M \mid r \geq a\} =: M_{\geq a}.$$

Also $a = \min \overline{S}(A, M) = \sup A$.

(c) $M = \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ besitzt kein Minimum. Denn für alle $x \in A$ gilt: $\frac{x}{2} \in A$ und $\frac{x}{2} < x$. Ähnlich zeigt man, dass A kein Maximum besitzt.

$$\overline{S}(A, M) = \mathbb{Q}_{\geq 1} \qquad \underline{S}(A, M) = \mathbb{Q}_{\leq 0}$$

$\sup A = 1$ und $\inf A = 0$.

Bemerkungen 6.3.

(1) $A \subset \underline{S}(\overline{S}(A, M), M)$ und $A \subset \overline{S}(\underline{S}(A, M), M)$
(2) Gilt $x \in A \cap \overline{S}(A, M)$, dann gilt $\forall a \in A : a \leq x$, somit $x = \max A$ und wegen (1) auch $x = \min \overline{S}(A, M)$.
(3) Hat A ein Maximum x, dann ist $x \in \overline{S}(A, M)$.
(4) A hat ein Maximum $\iff A \cap \overline{S}(A, M) \neq \emptyset \iff \#(A \cap \overline{S}(A, M)) = 1 \iff \sup A$ existiert und $\sup A \in A$.

Definition 6.4. Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf M. Wir sagen $(M, \leq)$ erfüllt die *Supremumseigenschaft* (S) falls gilt

(S) **Supremumseigenschaft**
Sei $A \subset M$ nicht-leer und nach oben beschränkt in M. Dann besitzt A ein Supremum in M.

Beispiel 6.5. $(\mathbb{Q}, \leq)$ erfüllt die Supremumseigenschaft nicht: Die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$$

ist nach oben beschränkt.

$$\overline{S}(A, \mathbb{Q}) := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \text{ und } x^2 \geq 2\}.$$

Da es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ gibt, folgt

$$\overline{S}(A, \mathbb{Q}) := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}.$$

Zu gegebenem $x \in \overline{S}(A, \mathbb{Q})$ definieren wir nun

$$y := x - \frac{x^2 - 2}{2x},$$

und man zeigt leicht $0 < y < x$. Weiter gilt

$$y^2 = x^2 - 2x\frac{x^2 - 2}{2x} + \left(\frac{x^2 - 2}{2x}\right)^2 > x^2 - (x^2 - 2) = 2,$$

also auch $y \in \overline{S}(A, \mathbb{Q})$. Da es zu jedem Element in $\overline{S}(A, \mathbb{Q})$ ein kleineres in $\overline{S}(A, \mathbb{Q})$ gibt, kann es in $\overline{S}(A, \mathbb{Q})$ kein Minimum geben. Also besitzt A kein Supremum in $\mathbb{Q}$. Wir werden später sehen, dass es in $\mathbb{R}$ eine positive Lösung von $x^2 = 2$ gibt, aufgrund der Supremumseigenschaft.

Satz 6.6. *Ist $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper, der die Supremumseigenschaft erfüllt, dann ist er archimedisch.*

Die Umkehrung gilt nicht: Beispiel $K = \mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen $(K, +, \cdot, \leq)$ sei nicht archimedisch. Dann gibt es ein $a \in K$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, a > n.$$

Das heißt, $\mathbb{N}$ ist in K nach oben beschränkt. Wenn die Supremumseigenschaft erfüllt ist, gibt es also ein Supremum s von $\mathbb{N}$ in K. Für ein beliebiges n gilt also $s \geq n + 1$ also $s - 1 \geq n$. Also ist auch $s - 1$ ein obere Schranke von $\mathbb{N}$. Dann ist aber s nicht das Minimum aller oberen Schranken, was ein Widerspruch zur Wahl von s ist. Da wir einen Widerspruch erhalten haben, muss die obige Annahme falsch gewesen sein. Wir haben dadurch gezeigt, dass $(K, +, \cdot, \leq)$ archimedisch ist. □

6.3. Axiome der reellen Zahlen. Im nächsten Abschnitt werden wir zwei Sätze zeigen:

Satz 6.7. *Es gibt einen geordneten Körper, der die Supremumseigenschaft erfüllt.*

Satz 6.8. *Seien $(K, +, \cdot, \leq)$ und $(\widetilde{K}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \widetilde{\leq})$ zwei geordnete Körper, die die Supremumseigenschaft erfüllen, dann gibt es eine eindeutige bijektive Abbildung $F : K \longrightarrow \widetilde{K}$, die Addition, Multiplikation und Ordnung erhält.*
F erhält die Addition: $\forall x, y \in K : \, F(x + y) = F(x) \tilde{+} F(y)$
F erhält die Multiplikation: $\forall x, y \in K : \, F(x \cdot y) = F(x) \tilde{\cdot} F(y)$
F erhält die Ordnung: $\forall x, y \in K : \, x \leq y \Longrightarrow F(x) \widetilde{\leq} F(y)$

Man sagt dann oft: $(K, +, \cdot, \leq)$ und $(\widetilde{K}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \widetilde{\leq})$ sind *kanonisch isomorph* und F nennt man einen *Isomorphismus (von geordneten Körpern).* [14].

Die Eigenschaften „geordneter Körper“ und “Supremumseigenschaft“ sind Eigenschaften, die wir von den reellen Zahlen erwarten. Da sie nun also die reellen Zahlen bis auf Isomorphie festlegen ist es sinnvoll, diese beiden Eigenschaft als die „Axiome der reellen Zahlen “ zu betrachten. Dies verpflichtet uns dazu, alles was wir für die reellen Zahlen zeigen wollen, aus diesen Axiomen heraus

[14] Isomorph hat hier eine andere Bedeutung als bei den natürlichen Zahlen. „Isomorph“ kommt aus dem Griechischen und heißt „von gleicher Gestalt“. Es gibt in der Mathematik viele Strukturen und zu jeder eine eigene Definition von „isomorph“. Bei der Abbildung F oben im Text handelt es sich um einen Isomorphismus von geordneten Körpern: dies ist eine bijektive Abbildung, die Addition, Multiplikation und die Ordnung erhält. Sobald es einen Isomorphismus von A nach B gibt, nennt man A und B isomorph. Das Wort kanonisch ist nicht ganz so leicht zu erklären. Es bedeutet hier, dass es einen Isomorphismus gibt, der sich aus der Struktur bereits ergibt und nicht von zusätzlichen Wahlen abhängt. In der obigen Proposition gilt $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$ und hierdurch ist der Isomorphismus F bereits festgelegt. Er ist also bereits durch die Struktur festgelegt und deswegen kanonisch.

zu begründen. Der große Vorteil dieses axiomatischen Zugangs ist es, dass alle danach hergeleiteten Aussagen davon unabhängig sind, wie wir ein Modell der reellen Zahlen im Beweis von Satz 6.7 konstruieren.

Axiome 6.9 (Axiome der reellen Zahlen)**.** *Die reellen Zahlen bilden einen geordneten Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*, der die Supremumseigenschaft erfüllt.*

Um beispielhaft zu zeigen, wie wir die Supremumseigenschaft nutzen können, betrachten wir das folgende Lemma.

Lemma 6.10. *Sei* $a \in \mathbb{R}$*,* $a \geq 0$*,* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*, so gibt es genau ein* $r \in \mathbb{R}$ *mit* $r^n = a$ *und* $r \geq 0$*.*

Beweis. Die Aussage ist klar für $n = 1$ und klar für $a = 0$. Sei nun $n \geq 2$ und $a > 0$.

Eindeutigkeit. Hierzu genügt es zu zeigen:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ 0 < x < y \Longrightarrow x^n < y^n$$

Dies folgt aus der folgenden Umformung

$$y^n - x^n = (y - x) \sum_{i=0}^{n-1} y^i x^{n-i-1} > 0,$$

da $\sum_{i=0}^{n-1} y^i x^{n-i-1}$ als Summe positiver Zahlen positiv ist.

Existenz. Wir betrachten die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^n \leq a\}$. Die Menge A ist nach oben beschränkt: $\max\{1, a\}$ ist eine obere Schranke von A. Man zeigt leicht, dass

$$\overline{S}(A, \mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \wedge x^n \geq a\}.$$

Da A nicht-leer ist, existiert $s := \sup A = \min \overline{S}(A, \mathbb{R})$. Offensichtlich gilt $s \geq 0$ und $s^n \geq a$.

Wir nehmen nun an $s^n > a$.

Behauptung: Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < 1$ mit

$$s^n(1 - n\delta) \geq a. \tag{6.11}$$

Mit der Behauptung argumentieren wir wie folgt:

Die Bernoulli-Ungleichung liefert $(s(1-\delta))^n \geq s^n(1 - n\delta)$, siehe Übungsblatt 4, Aufgabe 1 c) mit $x := -\delta$

Es gilt also $s > s(1 - \delta) \in \overline{S}(A, \mathbb{R})$. Somit ist dann s kein Minimum von $\overline{S}(A, \mathbb{R})$. Wir haben dann einen Widerspruch zur Annahme $s^n > a$ gefunden, und haben deswegen $s^n = a$, was die Existenz liefert.

Begründung der Behauptung:

Man zeigt mit Standard-Umformungen, dass (6.11) äquivalent zu

$$\delta \leq \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{s^n}\right)$$

ist. Die rechte Seite ist zwischen 0 und 1. Wenn wir als $\delta := \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{s^n}\right)$ wählen, so gilt die Behauptung. □

Bemerkung. Für $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, dann können wir jetzt alle Potenzen der Form b^t, mit $t \in \mathbb{Q}$ bilden. Wir schreiben hierzu $t = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Wenn wir das vorangehende Lemma für $a := b^p$ und $n := q$ anwenden, dann besagt dieses Lemma, dass es genau eine Zahl $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $r^q = b^p$. Wir würden nun gerne definieren $a^t := r$ für dieses r. Damit dies eine sinnvolle Definition ist, muss man überprüfen, dass r unahängig davon ist, wie wir t als Bruch schreiben. Dazu muss man die folgende Aussage überprüfen:[15] Es gelte $t = p/q = \tilde{p}/\tilde{q}$, $p, \tilde{p} \in \mathbb{Z}$, $q, \tilde{q} \in \mathbb{N}$. Wir wählen $r, \tilde{r} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r^q = b^p$ und $\tilde{r}^{\tilde{q}} = b^{\tilde{p}}$. Dann gilt $r = \tilde{r}$.

Man beachte, dass wir den Ausdruck b^t für eine positive reelle Zahl b und eine *reelle, nicht-rationale* Zahl t noch nicht definieren können.

Man kann aus dem bisher Bekannten nun auch leicht zeigen, dass für $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}_{>0}$, $t, \tilde{t} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(b\tilde{b})^t = b^t \tilde{b}^t \qquad b^{t+\tilde{t}} = b^t b^{\tilde{t}}$$

Fr 16.11.

Zur Konstruktion eines Modells der reellen Zahlen, das heißt zum Beweis von Satz 6.7, gibt es verschiedene Methoden, zum Beispiel:

- Die Konstruktion als Dezimalzahlen. Hier muss man zum Beispiel darauf achten, dass $1,4\overline{9} = 1,5$. Geht genauso im Binärsystem oder bezüglich anderer Basen.
- Die Konstruktion durch Intervallschachtelungen. Recht beliebt in Schulen, da anschaulich und unabhängig davon, ob man in der Basis 10 (=Dezimaldarstellung), in der Basis 2 (=Binärdarstellung) oder noch einer anderen Basis arbeitet. Siehe zum Beispiel [**22**, Abschnitt 2.3].
- Cauchy-Folgen. Dies führt unter anderem zum Begriff der Vollständigkeit, der nicht nur in diesem Kontext wichtig ist, sondern auch zum Beispiel bei Hilbert- und Banach-Räumen. Solche Räume sind z.B. wichtig, um partielle Differentialgleichungen zu lösen und um Quantenmechanik zu beschrieben.
- Dedekindsche Schnitte. Mathematisch elegant und intuitivere Definition als beim Zugang über Intervallschachtelung und Cauchy-Folgen. Wir werden diesem Zugang folgen.

6.4. Dedekindsche Schnitte. Ideen von Richard Dedekind, 1872, Link zur Orginalarbeit

Definition 6.12. Sei K ein archimedisch geordneter Körper. Ein *Dedekindscher Schnitt* in K ist eine Teilmenge $\alpha \subset K$ mit den folgenden Eigenschaften

[15] Diese Überprüfung sollten Sie inzwischen selbst tun können.

(1) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq K$,
(2) für $a \in \alpha$ und $x \in K_{<a}$ gilt $x \in \alpha$,
(3) α besitzt kein Maximum.

Man nennt Dedekindsche Schnitte auch *Unterklassen*. Das Komplement von α schreiben wir als $\alpha' := K \setminus \alpha$ und wird die zugehörige *Oberklasse* genannt.

Wir definieren

$$\overline{K} := \{\alpha \in \mathcal{P}(K) \mid \alpha \text{ ist ein Dedekindscher Schnitt}\}.$$

Beispiel 6.13. Sei $q \in K$. Dann ist $K_{<q}$ eine Unterklasse.

(1) $q - 1 \in K_{<q}$, also $K_{<q} \neq \emptyset$. Und $q + 1 \notin K_{<q}$, also $K_{<q} \neq K$.
(2) Sei $a \in K_{<q}$ und $x \in K_{<a}$. Dann haben wir $x < a$ und $a < q$, also auch $x < q$ und somit $x \in K_{<q}$.
(3) Zu jedem $a \in K_{<q}$ ist $a' := (a + q)/2$ ein Element $a' \in K_{<q}$ mit $a' > a$.

Die Abbildung $i_K : K \longrightarrow \overline{K}$, $q \mapsto K_{<q}$ ist injektiv. Denn ist $p < q$ so ist $p \in K_{<q}$ und $p \notin K_{<p}$.

Anschauliche Motivation für diese Konstruktion. Wir nehmen mal an, dass wir bereits $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften hätten, $K = \mathbb{Q}$. Definiere $\overline{\mathbb{Q}}$ wie oben. Zu $r \in \mathbb{R}$ definieren wir die Unterklasse in $\mathbb{Q}$

$$U(r) := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Bild mit einem Zahlenstrahl mit Ober- und Unterklasse

Wir erhalten eine Abbildung $U : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, $r \mapsto U(r)$. Man überlegt sich leicht, dass $\sup|_{\overline{\mathbb{Q}}} : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \sup \alpha$ die Umkehrabbildung von $U : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ ist. Somit ist U bijektiv. Wir definieren nun Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und Ordnung $\leq$ auf $\overline{\mathbb{Q}}$ so, dass U diese Strukturen erhält; und zwar so, dass wir die Existenz von $\mathbb{R}$ gar nicht nutzen. Zu zeigen ist dann, dass $(\overline{\mathbb{Q}}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist, der die Supremumseigenschaft erfüllt. Wir identifizieren wiederum $\mathbb{Q}$ mit $B(i_{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ vermöge $i_{\mathbb{Q}}$.

Es stellen sich dann unter anderem die Fragen:

- Was passiert, wenn man die Konstruktion wiederholt zu $\overline{\overline{\mathbb{Q}}}$, also $K := \overline{\mathbb{Q}}$?
- Was wissen wir über $\overline{K}$, für andere archimedisch geordnete Körper K, zum Beispiel $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$?

Es ist deswegen sinnvoll, im folgenden immer für $(K, +, \cdot, \leq)$ einen beliebigen archimedisch geordneten Körper zuzulassen, aber sich immer den Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ vorzustellen.

Sei also von nun an $(K, +, \cdot, \leq)$ ein beliebiger archimedisch angeordneter Körper.

Lemma 6.14. *Für jede Oberklasse α' gilt:*

(a) $\alpha' = \{x \in K \mid \forall a \in \alpha : a < x\}$
(b) für $a' \in \alpha'$ *und* $x' \in K_{>a'}$ *gilt* $x' \in \alpha'$.

Beweis. Zu (a): Sei $x \in \alpha'$. Wenn für (mindestens) ein $a \in \alpha$ die Ungleichung $a < x$ nicht gilt, dann haben wir den Widerspruch $x \in \alpha$. Somit $\alpha' \subset \{x \in K \mid \forall a \in \alpha : a < x\}$.

Sei $x \in K$ mit $\forall a \in \alpha : a < x$. Da $x < x$ falsch ist, gilt $x \notin \alpha$. Also $\alpha' \supset \{x \in K \mid \forall a \in \alpha : a < x\}$.

Zu (b): Dies folgt nun aus der Transitivität von $<$. □

Lemma 6.15. *Erfüllt* $(K, +, \cdot, \leq)$ *die Supremumseigenschaft, dann ist* $i_K : K \longrightarrow \overline{K}$, $q \mapsto K_{<q}$ *bijektiv.*

Beweis. Ist α eine Unterklasse, dann ist jedes $a' \in \alpha'$ eine obere Schranke von α. Ist $b \in \overline{S}(\alpha, K)$, dann ist b nicht in α, denn sonst wäre ja b ein Maximum von α, welches nicht existiert. Somit $b \in \alpha'$. Deswegen haben wir

$$\alpha' = \overline{S}(\alpha, K).$$

Erfüllt $(K, +, \cdot, \leq)$ die Supremumseigenschaft, dann hat also jede Oberklasse ein Minimum. Wenn wir $q := \sup \alpha = \min \alpha'$ setzen, so ist dann $\alpha = K_{<q}$. □

Beispiel 6.16. In einem geordneten Körper K ist

$$\alpha := K_{<0} \cup \{x \in K \mid x^2 < 2\}.$$

eine Unterklasse. Wenn diese Menge ein Supremum s besitzt, so gilt $s^2 = 2$.

Im Fall $K = \mathbb{Q}$ gibt es kein solches s, das heißt α hat kein Supremum. Dann ist $i_K : K \to \overline{K}$ nicht surjektiv.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ hat α ein Supremum in $\mathbb{R}$, das wir $\sqrt{2}$ nennen.

Definition 6.17 (Addtion). Zu Dedekindschen Schnitten α und β definieren wir ihre Summe als

$$\alpha + \beta := \{a + b \mid a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

Dies ist wiederum ein Dedekindscher Schnitt, denn:

(1) Sei $a \in \alpha$ und $b \in \beta$, dann gilt $a + b \in \alpha + \beta$, also $\alpha + \beta \neq \emptyset$.
Sei $a' \in \alpha'$ und $b' \in \beta'$, dann gilt für alle $a \in \alpha$ und $b \in \beta$ zunächst $a < a'$ und $b < b'$ und deswegen auch $a + b < a' + b'$. Somit $a' + b' \notin \alpha + \beta$, und dies ergibt $\alpha + \beta \neq K$.
(2) Sei $x < a+b$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$. Setze $a_0 := x - b < a$, somit $a_0 \in \alpha$. Deswegen gilt $x = a_0 + b \in \alpha + \beta$.
(3) Angenommen, es gäbe ein Maximum in $\alpha + \beta$, dann könnten wir es als $a + b$ mit $a \in \alpha$ und $b \in \beta$ schreiben. Da a kein Maximum von α ist, gibt es ein $a_1 \in \alpha$ mit $a_1 > a$. Wir erhalten den Widerspruch
$$a + b < a_1 + b \in \alpha + \beta.$$

Wir erhalten also eine Abbildung $+ : \overline{K} \times \overline{K} \to \overline{K}$.

Proposition 6.18. $(K, +)$ *ist eine kommutative Gruppe, das heißt es gelten (Aa), (Ak), (An), (Ai).*

Beweis. Die Kommutativität (Ak) ist offensichtlich.

Zu (Aa):

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \{b + c \mid b \in \beta, c \in \gamma\} = \{a + b + c \mid a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma\}$$

und man erhält ähnlich denselben Ausdruck für $(\alpha + \beta) + \gamma$.

Zu (An): Das neutrale Element ist $K_{<0}$. Zu zeigen: $\alpha = \alpha + K_{<0}$. Aus Definition 6.12 (2) folgt direkt $\alpha + K_{<0} \subset \alpha$. Um $\alpha \subset \alpha + K_{<0}$ zu zeigen, wählen wir ein $a \in \alpha$. Da a kein Maximum von α ist, gibt es ein $a_1 \in \alpha$ mit $a_1 > a$. Dann ist $b := a - a_1 < 0$ ein Element von $K_{<0}$. Somit $a = a_1 + b \in \alpha + K_{<0}$.

Zu (Ai): Sei $\alpha \in \overline{K}$. Die zugehörige Oberklasse α' kann ein Minimum besitzen oder nicht. Falls α' ein Minimum besitzt, dann definiere

$$\beta := \{-a' \mid a' \in \alpha' \setminus \{\min \alpha'\}\},$$

falls α' kein Minimum besitzt, so definiere

$$\beta := \{-a' \mid a' \in \alpha'\}.$$

Da wir in dieser Definition das Minimum von α' weggenommen haben, falls es existiert, hat β kein Maximum, also (3). Aus Lemma 6.14 ergibt sich (2). Außerdem (1) $\beta \neq \emptyset$ und $\beta \neq K$. Wir haben also $\beta \in \overline{K}$.

Nun zeigen wir $\alpha + \beta = K_{<0}$, das heißt β ist das additive Inverse zu α.

Sei $a \in \alpha$ und $b \in \beta$, dann folgt $-b \in \alpha'$ und deswegen $-b > a$. Dies ergibt $a + b < 0$, in anderen Worten $a + b \in K_{<0}$. Also $\alpha + \beta \subset K_{<0}$.

Sei nun $x \in K_{<0}$. Wir suchen $a \in \alpha$ und $b \in \beta$ mit $x = a + b$.

Ansatz: Zu einem festen $a_0 \in \alpha$ wähle

$$a := \underbrace{a_0 + (n-1)|x|}_{\in \alpha} \text{ und } b := -(\underbrace{a_0 + n|x|}_{\substack{\in \alpha' \\ \text{kein Min}}})$$

für $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Damit dieser Ansatz erfolgreich ist, muss n das Minimum der Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N}_{>0} \mid a_0 + m|x| \in \alpha'\}$$

sein.

Durchführung: Definiere also M wie oben. Als ersten Schritt zeigen wir $M \neq \emptyset$.

Wähle ein $a' \in \alpha'$.

$$a_0 + m|x| \geq a' \;\leftrightarrow\; m \geq \frac{a' - a_0}{|x|}$$

Da K archimedisch ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$, das die rechte Ungleichung und damit auch die linke Ungleichung erfüllt. Es folgt $m \in M$, also $M \neq \emptyset$. Auf Grund der Wohlordnung der natürlichen Zahlen (Satz 1.9) besitzt M ein Minimum. Sei $n := \min M$. Definieren wir a und b wie oben, folgt $a \in \alpha$, $-b \in \alpha'$, $a + b = x$. Wenn $-b$ nicht ein/das Minimum von α' ist, so gilt $b \in \beta$, und wir haben das zu Zeigende gezeigt.

Wenn α' ein Minimum besitzt und wenn $-b = \min \alpha'$, dann setze

$$\tilde{a} := a_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)|x| = -b - \frac{1}{2}|x| < -b = \min \alpha',$$

und damit $\tilde{a} \in \alpha$, und

$$\tilde{b} := -\Bigg(\underbrace{a_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)|x|}_{\substack{\in \alpha' \\ \text{kein Min}}}\Bigg) = b - \frac{1}{2}|x| \in \beta.$$

Dann gilt $\tilde{a} + \tilde{b} = -|x| = x$. $\square$

ANHANG A

Mehr Details zu den Grundlagen der Logik

1. Das Russellsche Paradoxon

(Auch Russellsche Antinomie genannt. Vorläufer sind die Cantorsche Antinomie und das Burali-Forti-Paradoxon, siehe Wikipedia.)

Am Anfang der Vorlesung haben wir gesagt, dass unser Ziel ist, eine axiomatisch aufgebaute Mathematik zu erhalten. Diesem Anspruch sind wir bisher nicht gerecht geworden. Immer wieder wurde die Intuition genutzt, um Objekte zu definieren, anstatt wirklich saubere mathematische Definitionen hinzuschreiben. Das Vorgehen war bis weit ins 19. Jahrhundert ganz ähnlich. Das intuitive Verwenden des Mengenbegriffs führte dann aber zu dem Russellschen Paradoxon.

Frage 1.1. Gibt es die Menge aller Mengen?

Stand der Mathematik gegen Ende des 19. Jahrhunderts: Nach Cantors Beschreibung (Beschreibung 3.1) sollte es die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen geben. Das Elementzeichen $\in$ ist dann eine auf $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ definierte Aussageform, wobei $\mathcal{E}$ die Menge aller Elemente irgendeiner Menge bezeichne, also $\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{M}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \{w, f\} \\ (x, M) & \mapsto & x \in M \end{array}$$

Russell bildete nun daraus

$$\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{M} \mid x \notin x\}.$$

Gilt nun $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$? Für alle Mengen x gilt

$$x \in \mathcal{N} \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin x$$

und wenn wir $x := \mathcal{N}$ setzen, so erhalten wir

$$\mathcal{N} \in \mathcal{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N} \notin \mathcal{N}.$$

Aussagen in der Form $A \leftrightarrow \neg A$ sind aber immer falsch, also haben wir einen Widerspruch erhalten.

Um die Mengenlehre und somit die Mathematik sauber auf Axiomen aufzubauen, müssen wir also viel genauer als bisher vorgehen und intuitive Argumente durch formal korrekte Beweise ersetzen.

Wie löst man dieses Paradoxon auf: Nicht jede „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten“ ist eine Menge. Die Axiome sollen regeln, wann solche eine Zusammenfassung eine Menge ist. Insbesondere ist die „Zusammenfassung“ $\mathcal{M}$ aller Mengen selbst keine Menge, sondern etwas größeres, das wir Klasse nennen wollen. Analog sind auch $\mathcal{N}$ und $\mathcal{E}$ keine Mengen, sondern Klassen.

2. Axiomatische Mengenlehre

Wir wollen nun skizzieren, wie man die Mengenlehre sauber auf Axiomen aufbauen kann. Man nimmt hierzu mehrere Axiomen an, all diese Axiome zusammen nennt man dann ein Axiomen-System. Historisch sind hier wichtige Fortschritte zu Ende zu 19. Jahrhunderts und zu Beginn des 20. Jahrhunderts gemacht worden. Nun haben verschiedene Mathematiker verschiedene Axiomensysteme entwickelt und benutzt. Das wohl bekannteste Axiomensystem heißt ZFC nach den Mathematikern Zermelo und Fraenkel und C für „Axiom of **C**hoice“ (= Auswahlaxiom). Wir stellen ein anderes vor (NBG), das sehr ähnliche Eigenschaften hat. Man kann zeigen, dass man mit ZFC und NBG dieselben Sätze über Mengen herleiten kann. Die Axiome von ZFC machen oft rein mengentheoretische Argumente einfacher, während die Axiome von NBG für das praktische Arbeiten oft besser geeignet sind.

Grundlegende Ideen:

- Man will gar nicht mehr erklären, was eine Menge ist, sondern fordert axiomatische Eigenschaften für Mengen.
- Man nimmt an, dass auch alle Elemente von Mengen ebenfalls Mengen sind. In anderen Worten: jede Menge ist ein Mengensystem über einer geeigneten Menge. In der Notation des letzten Abschnitts gilt also nun $\mathcal{M} = \mathcal{E}$. Die Zusammenfassung aller Regensburger Autos ist dann keine Menge. Der Satz „Es existiert kein Auto“ ist also in einer streng axiomatisch aufgebauten Vorlesung über Logik und Mengenlehre eine wahre Aussage, denn ein Auto ist ja keine Menge von Mengen.
- Trotz dieser Einschränkungen kann man immer noch natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen und vieles mehr als Mengen definieren. Die Zahl π ist also eine Menge, deren Elemente wieder Mengen sind, deren Elemente wieder Mengen sind, ... Siehe dazu auch die Peano-Axiome in Abschnitt B in Kapitel „Zahlen“.

Die Axiome übernehme ich aus [**17**], siehe auch [**25**]. Zum Vergleich zu ZFC verweise ich auf [**13**].

Axiome 2.1 (Axiome der Mengenlehre nach von Neumann, Bernays, Gödel (NBG))**.**

- *Es gibt zwei Sorten von Objekten,* Mengen *und* Klassen*. Außerdem gibt es noch die Beziehung $\in$, die besagt, wann eine Klasse das Element einer anderen Klasse ist.*
- *Jede Menge ist eine Klasse.*

- *Alle Elemente von Klassen sind Mengen.*
- Extensionalität. *Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.*
- Komprehension. *Ist C eine auf allen Mengen definierte Aussagenform, die nach strikt festgelegten Regeln aufgebaut ist, die wir hier der Kürze halber nicht genauer diskutieren.*[1] *Dann ist*
$$\{x \textit{ ist eine Menge} \mid C(x)\}$$
eine Klasse.
- *Die* leere Klasse $\emptyset := \{x \textit{ ist eine Menge} \mid x \neq x\}$ *ist eine Menge.*
- Aussonderungsmengenaxiom. *Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge.*
Benutzt wurde hierbei die folgende Definition: Eine Klasse A ist eine Teilklasse *einer Klasse B, wenn jedes Element von A ein Element von B ist.*
- Paarmengenaxiom. *Sind A und B Mengen, so ist auch $\{A, B\}$ eine Menge.*
- Vereinigungsaxiom. *Ist A eine Menge, so ist auch*
$$\bigcup A := \{x \mid \exists y \in A : x \in y\}$$
eine Menge, die Vereinigungsmenge von A.
- Potenzmengenaxiom. *Ist A eine Menge, so ist auch $\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subset A\}$ eine Menge, die* Potenzmenge von A.
- Fundierungsaxiom. *Ist $A \neq \emptyset$, so gibt es ein $x \in A$ mit $x \cap A = \emptyset$.*
- Ersetzungsaxiom.*Sind X und Y Klassen und ist F eine funktionale „Relationsklasse"*[2] *mit $D(F) = X$ und $B(F) \subset Y$. Ist die Teilklasse $A \subset X$ eine* Menge, *so ist auch $B(F|_A)$ eine Menge.*
- Unendlichkeitsaxiom. *Es gibt eine induktive Menge; eine Menge A heißt* induktiv, *wenn $\emptyset \in A$ und wenn für alle $x \in A$ auch $x \cup \{x\} \in A$ ist.*
- Auswahlaxiom. *Sei I eine nicht-leere Menge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen. Dann ist $\prod_{i\in I} M_i$ nicht die leere Menge.*

Bemerkungen 2.2.

(a) Besonders interessant ist das Auswahlaxiom. Es folgt bereits aus den Axiomen zuvor, dass $\prod_{i\in I} M_i$ eine Menge ist. Falls I endlich ist, so gilt offensichtlich $\prod_{i\in I} M_i \neq \emptyset$. Für unendliche Indexmengen kann man aber $\prod_{i\in I} M_i \neq \emptyset$ im allgemeinen nicht aus den anderen Axiomen herleiten. Wenn man es annimmt, „weiß" man zwar, dass $\prod_{i\in I} M_i$ mindestens ein Element besitzt, es kann aber vorkommen, dass kein einziges Element von $\prod_{i\in I} M_i$ angegeben werden kann.
Es ist nun ganz lehrreich, zu untersuchen, welche Aussagen der Mathematik nur unter Hinzunahme des Auswahlaxioms gezeigt werden können, und für welche Aussagen, das Auswahlaxiom nötig ist. Angenommen wir hätten nur die Axiome bis zum Unendlichkeitsaxiom. Dann

[1] Siehe hierzu [**17**] und [**13**]. Gemeint ist eine Aussagenform 1. Stufe, in der nicht über Klassenvariable quantifiziert wird.

[2] Unter einer Relationsklasse verstehen wir eine Klasse, deren Elemente Paare sind. Man kann dann die üblichen Begriffe einer Relation definieren, z.B. „funktional", Definitionsbereich, Bild, etc.

kann man zeigen, dass das Auswahlaxiom äquivalent zur Aussage „Jeder Vektorraum besitzt eine Basis“ ist.
Wenn wir das Auswahlaxiom annehmen, dann gibt es einen Vektorraum, der zwar eine Basis besitzt, aber zugleich kann keine Basis angegeben werden.
Das Auswahlaxiom ist auch äquivalent zur Aussage: „Sind X und Y Mengen, dann gibt es eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ oder es gibt eine injektive Abbildung $f : Y \longrightarrow X$“.

(b) Man kann aus den Axiomen der Mengenlehre *nicht* folgern, dass die Mengenlehre widerspruchsfrei ist! (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz). Die Mathematik beruht auf der *Annahme*, dass die Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind.

(c) Es gibt Aussagen, von denen gezeigt werden kann, dass weder diese Aussage noch die Negation dieser Aussage beweisbar ist. Die Cantorsche Kontinuumshypothese ist solch eine Aussage:

„Sei M eine Menge, so dass es **keine** injektive Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt.
Dann gibt es eine injektive Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow M$.“

Solche Aussagen gibt es in jedem hinreichend großen logischen System (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz).

Bemerkung 2.3. Das Auswahlaxiom ist „unabhängig“ von den anderen Axiomen der Mengenlehre. Aufgrund der Nicht-Konstruktivität und etwas ungewöhnlicher Konsequenzen wird im Normalfall explizit angegeben, wenn ein Beweis das Auswahlaxiom verwendet.

Aus den obigen Axiomen kann man nun Schritt für Schritt die ganze Mathematik heraus herleiten.

ANHANG B

Die Peano-Axiome

1. Die Axiome und erste Konsequenzen

Die natürlichen Zahlen wurden von Dedekind (1888) und Peano (1889) axiomatisiert. Siehe [**17**, Kapitel 3 und 4], [**20**], oder [**13**, Kapitel V] für mehr Details.

Axiome 1.1 („Axiome" der natürlichen Zahlen (Peano-Axiome))**.** *Gegeben sei*

- *eine Menge* N*,*
- *ein (ausgewähltes) Element in* N*, das wir* 0 *nennen,*
- *eine Abbildung* $s : N \longrightarrow N$*,* $x \mapsto s(x)$*, genannt die* Nachfolger-Abbildung.

Wir sagen, dass $(N, 0, s)$ *die Peano-Axiome erfüllt, falls gilt:*

(P1) $0 \notin B(s)$
(P2) Die Abbildung $s : N \longrightarrow N$ *ist injektiv.*
(P3) (Induktionsaxiom) Erfüllt $T \subset N$ *die Bedingungen* $0 \in T$ *und* $s_{\#}(T) \subset T$*, dann gilt bereits* $T = N$*.*

Wenn $(N, 0, s)$ die Peano-Axiome erfüllt, sagt man $(N, 0, s)$ ist ein *Modell der natürlichen Zahlen*.

Proposition 1.2. *Es gibt eine Menge* N *ein Element* $0 \in N$ *und eine Nachfolger-Abbildung* $s : N \longrightarrow N$*, so dass* $(N, 0, s)$ *die Peano-Axiome erfüllt.*

Beweis folgt unten.

Proposition 1.3. *Wenn* $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s})$ *und* $(\widehat{N}, \widehat{0}, \widehat{s})$ *die Peano-Axiome erfüllen, dann gibt es eine bijektive Abbildung* $F : \widetilde{N} \longrightarrow \widehat{N}$*, so dass* $F(\widetilde{0}) = \widehat{0}$ *und* $F \circ \widetilde{s} = \widehat{s} \circ F$*.*

Man sagt dann oft: $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s})$ und $(\widehat{N}, \widehat{0}, \widehat{s})$ sind *kanonisch isomorph.*

Beweis später.

Die letzte Gleichung schreibt man am besten als Diagramm, ein sogenanntes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widetilde{N} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\widetilde{s}"] & \widehat{N} \arrow[d, "\widehat{s}"] \\ \widetilde{N} \arrow[r, "F"] & \widehat{N} \end{tikzcd}$$

Alles, was man üblicherweise mit natürlichen Zahlen macht (Addition, Multiplikation, Teilbarkeit, Primzahlen, etc.) beruht letztendlich auf dem Tripel $(N, 0, s)$ und den Peano-Axiomen. Deswegen besagt Prop. 1.3, dass alle Eigenschaften von $(N, 0, s)$ die man aus den Peano-Axiomen herleiten kann, entweder in allen Modellen gelten oder in keinem. Beispiele: In jedem Modell gibt es unendlich viele Primzahlen, n ist eine Zahl mit 4 Teilern in $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s})$ genau dann wenn $F(n)$ eine Zahl mit 4 Teilern in $(\widehat{N}, \widehat{0}, \widehat{s})$ ist. Es kann uns also egal sein, welches Modell die natürlichen Zahlen beschreibt, wichtig sind allein die Peano-Axiome.

Bemerkung 1.4. Sind die Peano-Axiome weitere Axiome? Oder eine Definition? Oder Aussagen? Es gibt hier zwei verschiedene Sichtweisen. Je nach Anwendung und Dozent wird die eine oder andere bevorzugt.

(a) Die mengentheoretische Sichtweise: Die Peano-Axiome sind eine **Definition**.
Proposition 1.2 besagt: Es gibt mindestens ein Tripel $(N, 0, s)$, das die Peano-Axiome erfüllt. Und: Erfüllen $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s})$ und $(\widehat{N}, \widehat{0}, \widehat{s})$ die Peano-Axiome, so sind $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s})$ und $(\widehat{N}, \widehat{0}, \widehat{s})$ „im wesentlichen gleich“ (Proposition 1.3).
(b) Die axiomatische Sichtweise: wir wollen im mathematischen Teilgebiet „Theorie der natürlichen Zahlen“ annehmen, dass es eine Menge N, ein $0 \in N$ und eine Nachfolger-Abbildung gibt und nehmen die Peano-Axiome als **Axiome dieses Teilgebiets**. Proposition 1.2 besagt dann, dass es ein *mengentheoretisches Modell* gibt, das die Axiome erfüllt. Wie dieses Modell aber aussieht, ist für unsere weiteren Überlegungen irrelevant, da wir nur die Axiome für weitere Schritte nutzen.

Beweis von Proposition 1.2. Wiederholung: eine Menge A heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in A$ und wenn für alle $x \in A$ auch $x \cup \{x\} \in A$ ist.

Nach dem Unendlichkeitsaxiom gibt es eine induktive **Menge** A. Wir setzen $0 := \emptyset$. Wir definieren nun die Nachfolger-Abbildung

$$\widetilde{s} : A \longrightarrow A, \quad x \mapsto x \cup \{x\}.$$

Das Tripel $(A, 0, \widetilde{s})$ erfüllt offensichtlich (P1).

Für (P2) muss etwas gearbeitet werden, wir beweisen die Injektivität von $\widetilde{s} : A \longrightarrow A$ mit einem Widerspruchsbeweis.

Angenommen die Abbildung sei nicht injektiv. Dies bedeutet:

$$\exists x, y \in A : \; x \neq y \wedge \widetilde{s}(x) = \widetilde{s}(y) \tag{1.5}$$

Es folgt $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ und hieraus folgen wiederum die Aussagen

$$x \in y \vee x \in \{y\} \tag{1.6}$$

und

$$y \in x \vee y \in \{x\}. \tag{1.7}$$

Nun ist aber $x \in \{y\}$ gleichbedeutend mit $x = y$ und dies haben wir oben ausgeschlossen. Somit erhalten wir aus (1.6) dann $x \in y$, und analog erhalten wir $y \in x$ aus (1.7).

Wir definieren nun $B := \{x, y\}$. Wegen $B \neq \emptyset$ ergibt das Fundierungsaxiom die Existenz eines $b \in B$ mit $b \cap B = \emptyset$. Im Fall $b = x$ erhalten wir $x \cap \{x, y\} \supset \{y\}$ also $b \cap B \neq \emptyset$. Im Fall $b = y$ zeigen wir $b \cap B \neq \emptyset$ analog. Wir haben einen Widerspruch erhalten, da wir gleichzeitig $b \cap B \neq \emptyset$ und $b \cap B = \emptyset$ erhalten haben. Also war eine Annahme (1.5) falsch. Wir haben mit einem Widerspruchsbeweis die Injektivität von $\widetilde{s}$ gezeigt.

Es verbleibt aber unklar, ob $(A, 0, \widetilde{s})$ auch (P3) erfüllt.

Wir setzen nun

$$N := \bigcap \{B \in \mathcal{P}(A) \mid B \text{ ist induktiv}\}.$$

Der Schnitt dieser induktiven Mengen ist wieder induktiv. Das Tripel $(N, 0, \widetilde{s}|_N)$ erfüllt offensichtlich (P1) und (P2). Erfüllt T die Voraussetzungen in (P3), so ist T induktiv und es gilt $T \in \mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(A)$. Also folgt $N \subset T$, somit $T = N$. Wir erhalten (P3). □

Beispiel 1.8. Die Konstruktion liefert dann $0 = \emptyset$, $1 = s(0) = \{\emptyset\}$, $2 = s(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = s(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Proposition 1.9. *Jede natürliche Zahl ungleich* 0 *ist der Nachfolger genau einer natürlichen Zahl.*

Beweis (Direkter Beweis). Wir wissen bereits, dass jede natürliche Zahl der Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl ist. Zu zeigen bleibt also, dass jede natürlichen Zahl n ungleich 0 Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Wir definieren:

$$U := \{n \in N \mid n \text{ ist Nachfolger einer natürlichen Zahl}\}$$

und dann

$$T := U \cup \{0\}.$$

Die Menge T erfüllt die Eigenschaften im Peano-Axiom (P3): 0 ist in T, und wenn n in T enthalten ist, dann ist n eine natürliche Zahl, und somit ist $s(n)$ eine natürliche Zahl, die Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Somit ist $s(n)$ in T. Axiom 3 besagt also, dass T gleich N ist. Daraus folgt $U = N$ oder $U = N \setminus \{0\}$. Also ist jede Zahl ungleich 0 Nachfolger einer natürlichen Zahl. □

Man kann den Beweis auch anders führen, als sogenannten *Widerspruchsbeweis.*

Beweis (Widerspruchsbeweis). **Wir nehmen an, die Aussage des Lemmas ist falsch, und wollen daraus einen Widerspruch herleiten. Wenn die Aussage des Lemmas falsch ist, dann können wir annehmen:** *Es gebe* eine natürliche Zahl n ungleich 0, die nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Wir definieren $T := N \smallsetminus \{n\}$. Die Menge T enthält 0, da $n \neq 0$. Ist $t \in T$, so ist t auch eine natürliche Zahl und somit ist auch der Nachfolger $s(t)$ eine natürliche Zahl. Da n kein Nachfolger einer natürlichen Zahl ist, folgt $s(t) \neq n$ und somit $s(t) \in T$. Die Menge T erfüllt also die Eigenschaften in Peano-Axiom (P3) und somit gilt $T = N$. Zusammen mit $n \in N$ und $n \notin T$ ergibt sich ein Widerspruch. **Da die Existenz einer Zahl n mit den obigen Eigenschaften zu einem Widerpruch führen würde, wissen wir, dass es ein solches Gegenbeispiel nicht gibt, und die Aussage des Lemmas ist somit bewiesen.** □

2. Vollständige Induktion und rekursive Definition

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass $(N, 0, s)$ die Peano-Axiome erfüllt. Die Addition $+$ ist noch nicht definiert! Wir schreiben 1 für $s(0)$, 2 für $s(1)$ etc.. Die Notation $n + 1$ ist im Sinne von $s(n)$ zu lesen.

Satz 2.1 (Vollständige Induktion)**.** *Sei $A(\,\cdot\,)$ eine auf N definierte Aussageform. Wir setzen voraus, dass Induktionsanfang und Induktionsschritt erfüllt sind:*
Induktionsanfang*: $A(0)$ ist wahr.*
Induktionsschritt*: Für alle $n \in N$ gilt: $(A(n) \Longrightarrow A(n+1))$).*
Dann gilt für alle $n \in N$ die Aussage $A(n)$.

Im Induktionsschritt nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung*.

Beweis. Sei
$$T := \{n \in N \mid A(n)\}.$$
Auf Grund des Induktionsanfangs ist 0 in T. Der Induktionsschritt besagt: wenn $n \in T$, dann ist auch $n + 1$ in T. Die Menge T erfüllt also die Eigenschaften in Peano-Axiom (P3) und somit gilt $T = N$. □

Viele Variation hiervon, z.B.

Satz 2.2 (Vollständige Induktion, Starke Version)**.** *Sei $A(n)$ eine auf N definierte Aussage. Wir setzen voraus, dass Induktionssanfang und der modifizierte Induktionsschritt erfüllt sind:*
Induktionsanfang*: $A(0)$ ist wahr.*
Modifizierter Induktionsschritt*: Für alle $n \in N$ gilt: Aus $A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)$ folgt $A(n+1)$).*
Dann gilt für alle $n \in N$ die Aussage $A(n)$.

Beweis. Übungsblatt 4, Aufgabe 4 □

SATZ 2.3 (Dedekindscher Rekursionssatz)**.** *Sei M eine Menge, $a \in M$ und $g : M \times N \longrightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : N \longrightarrow M$ so dass $f(0) = a$ und*

$$\forall n \in N : \; f(s(n)) = g(f(n), n).$$

Natürlich kann man hier auch wieder $n + 1$ statt $s(n)$ schreiben.

Wenn eine Abbildung auf diese Art und Weise definiert wird, nennen wir dies eine *rekursive Definition*.

Beweis. Wir beweisen zunächst durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in N$:

Es gibt eine eindeutige[1] Abbildung $f_n : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow M$ mit den Eigenschaften[2]
$f_n(0) = m$ und $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} : \; f_n(i+1) = g(f_n(i), i)$.

Induktionsanfang: $n = 0$. Die Abbildung $f_0 : \{0\} \longrightarrow M$, $0 \mapsto m$ ist solch eine Abbildung. Und es ist offensichtlich die einzige.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: $A(n)$
Also wir haben eine Abbildung f_n wie oben.

Wir definieren dann

$$f_{n+1}(i) := \begin{cases} f_n(i) & \text{falls } i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \\ g(f_n(n), n) & \text{falls } i = n + 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung erfüllt die in $A(n + 1)$ genannte Eigenschaft und man sieht leicht, dass es die einzige ist.

Wir setzen nun: $f(n) := f_n(n)$. Die so definierte Abbildung $f : N \longrightarrow M$ erfüllt die Eigenschaften des Satzes. □

Wir können nun Proposition 1.3 zeigen.

Beweis von Prop. 1.3. Wir definieren rekursiv $F(\widetilde{1}) = \widehat{1}$ und für $n \in N$: $F(\widetilde{s}(n)) = \widehat{s}(F(n))$. Dies ergibt eine Abbildung $F : \widetilde{N} \longrightarrow \widehat{N}$. Analog definiert man eine $G : \widehat{N} \longrightarrow \widetilde{N}$ durch $G(\widehat{1}) = \widetilde{1}$ und $G(\widehat{s}(n)) = \widetilde{s}(G(n))$. Man zeigt nun durch Induktion $G \circ F = \Delta_{\widetilde{N}}$ und $F \circ G = \Delta_{\widehat{N}}$, d.h.

---

[1] „eindeutig“ bedeutet: es gibt so eine Funktion, und dies ist die einzige Funktion, die das erfüllt!

[2] Man muss sich an dieser Stelle eigentlich Gedanken machen, was hier mit $\{0, 1, 2 \ldots, n\}$ gemeint ist. Es ist die Menge K_n mit den Eigenschaften

(1) $0 \in K_n$,
(2) $s_\#(K_n \smallsetminus \{n\}) \subset K_n$,
(3) Ist T eine Menge mit $0 \in T$ und $s_\#(T \smallsetminus \{n\}) \subset T$, dann gilt $K_n \subset T$.

Dann ist zu zeigen dass $s(n) \notin K_n$ und $K_{n+1} = K_n \cup \{s(n)\}$. Man sieht also, dass K_n genau das ist, was wir uns unter $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ vorstellen.

$G : \widehat{N} \longrightarrow \widetilde{N}$ ist die Umkehrfunktion von $F : \widetilde{N} \longrightarrow \widehat{N}$ und somit ist $F : \widetilde{N} \longrightarrow \widehat{N}$ bijektiv. Die übrigen Eigenschaften dieser Abbildung folgen direkt aus der Definition von F. □

Aus Proposition 1.3 folgt: alles was wir für aus den Peano-Axiomen heraus für $(N, s, 0)$ zeigen, gilt auch für $(N', s', 0')$. Es ist also unerheblich, welches Modell wir nutzen. Wir nehmen nun eines her und schreiben ab sofort $\mathbb{N}$ an Stelle von N, $n \mapsto n+1$ an Stelle von s und weiterhin 0. Wir nennen $\mathbb{N}$ die *Menge der natürlichen Zahlen*.

Beispiele 2.4.

(1) *Addition*: Sei $M = \mathbb{N}$, $g(m, n) := s(m)$, $a \in \mathbb{N}$. Wir erhalten eine Abbildung $\alpha_a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\alpha_a(0) = a$ und mit $\forall n \in \mathbb{N} :\ \alpha_a(s(n)) = s(a_a(n))$. Wir schreiben $a + n := \alpha_a(n)$. Für $n = 1$ stimmt dies mit der bisherigen Definition von $a + 1$ überein.
(2) *Multiplikation*: Sei $M = \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m + i$. Wir erhalten eine Abbildung $\mu_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mu_i(0) = 0$ und mit $\forall n \in \mathbb{N} :\ \mu_i(s(n)) = \mu_i(n) + i$. Wir schreiben $i \cdot m := \mu_i(m)$.
(3) *Potenzieren*: Sei $M = \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m \cdot i$. Wir erhalten eine Abbildung $p_i : N \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $p_i(0) = 1$ und mit $\forall n \in N :\ p_i(s(n)) = p_i(n) \cdot i$. Wir schreiben $i^m := p_i(m)$.
(4) *Fakultät*: Sei $M = \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto (n + 1) \cdot m$. Wir definieren dadurch die Abbildung $! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $0! := 1$ und $(m + 1)! := m! \cdot (m + 1)$. Also $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Satz 2.5. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ *erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(Aa) ***Addition ist assoziativ.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(An) ***Addition hat neutrales Element.***
Es gibt ein Element $\tilde{0} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$x + \tilde{0} = \tilde{0} + x = x.$$

(Ak) ***Addition ist kommutativ.***
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

(Ma) ***Multiplikation ist assoziativ.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(Mn) ***Multiplikation hat neutrales Element.***
Es gibt ein Element $\tilde{1} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot x = x.$$

(Mk) ***Multiplikation ist kommutativ.***
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(AMd) ***Addition und Multiplikation erfüllen das Distributivgesetz.***
Für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Den Beweis kann man mit vollständiger Induktion durchführen, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden. Es ist eine gute Übung, einmal die Kommutativität der Addition durch vollständige Induktion oder direkt aus den Peano-Axiomen herzuleiten. Dies ist etwas mühsam, aber prinzipiell möglich.

Offensichtlich ist 0 die einzige Zahl, die an Stelle von $\tilde{0}$ die obige Eigenschaft erfüllt. Wir nennen $0 = \tilde{0}$ das *neutrale Element der Addition*. Analoges gilt für 1 und $\tilde{1}$, und man nennt $1 = \tilde{1}$ das *neutrale Element der Multiplikation*.

Lemma 2.6 (Kürzungsregel)**.** *Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $n + k = m + k$. Dann gilt auch $m = n$.*

In anderen Worten

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N} : \ n + k = m + k \Longrightarrow m = n.$$

Der Beweis folgt durch Induktion nach k (wird nicht im Detail ausgeführt).

Lemma 2.7. *Jede von 0 verschiedene natürliche Zahl ist Nachfolger einer natürlichen Zahl.*

Beweis. Angenommen $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ und $k \notin s_{\#}(\mathbb{N})$. Definiere $T := \mathbb{N} \setminus \{k\}$. Dann gilt $0 \in T$ und $s_{\#}(T) \subset T$ und somit erhalten wir den Widerspruch $T = \mathbb{N}$. □

Lemma 2.8. *Sind $n, m \in \mathbb{N}$. Es gelte $n + m = 0$. Dann gilt $n = m = 0$.*

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Wir nehmen an, dass $n \neq 0$ oder $m \neq 0$. Da der Fall $m \neq 0$ ganz analog zum Fall $n \neq 0$, genügt es den Fall $n \neq 0$ zu betrachten. [3] Dann gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $n = s(k)$. Es folgt $0 = s(k) + m = s(k + m)$, was der Tatsache widerspricht, dass 0 kein Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. □

Hier gäbe es noch viel hinzuzufügen. Deswegen wird der Anhang evtl. hier noch erweitert.

[3] Da Sätze in dieser Art oft vorkommen, sagt man „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) gilt $n \neq 0$."

3. Ordnung der natürlichen Zahlen

Wir definieren nun eine Relation:

$$\leq := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : \; m = n + k\}.$$

Lemma 3.1. *Diese Relation $\leq$ ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$. Es gilt:*

(1) Reflexivität auf $\mathbb{N}$: Für alle m in $\mathbb{N}$ ist $m \leq m$ wahr.
(2) Antisymmetrie: Für alle n und m in $\mathbb{N}$ gilt

$$n \leq m \wedge m \leq n \Longrightarrow n = m.$$

(3) Transitivität: Für alle n, m und k in $\mathbb{N}$ gilt:

$$n \leq m \wedge m \leq k \Longrightarrow n \leq k.$$

(4) Totalität: Für alle n und m in $\mathbb{N}$ gilt

$$n \leq m \vee m \leq n$$

(5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n + 1$.

Beweis. Aussagen (1), (3) und (5) sind offensichtlich.

Zu (2) (Antisymmetrie): Es gelte $n \leq m$ und $m \leq n$. Dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $m = n + k_1$ und $n = m + k_2$. Daraus folgt

$$n = m + k_2 = n + k_1 + k_2.$$

Mit der Kürzungsregel (Lemma 2.6) folgt $k_1 + k_2 = 0$ und mit Lemma 2.8 ergibt sich $k_1 = k_2 = 0$. Also $n = m$.

Zu (4) (Totalität): Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$T_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \vee n \leq m\}.$$

Man zeigt mit etwas Aufwand $0 \in T_n$ und $s_\#(T_n) \subset T_n$. Mit (P3) folgt $T_n = \mathbb{N}$, also die Behauptung. □

Definition 3.2. Sei R eine (partielle) Ordnungsrelation auf M. Ein *Minimum* (beziehungsweise *Maximum*) ist ein Element $m \in M$, so dass für alle $n \in M$ gilt: mRn (bzw. nRm).

Bemerkung. Wegen der Antisymmetrie gibt es höchstens ein Minimum.

Beispiele: Das offene Intervall $]0,1[$ in $\mathbb{R}$ hat kein Minimum bezüglich $\leq$.

Die Menge $M := \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ trägt die Ordnungsrelation $\subset$. Es existiert kein Minimum in M.

Proposition 3.3 (Wohlordnung von $\mathbb{N}$)**.** *Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, dann besitzt A ein Minimum.*

Beweis. Wir nehmen an, A besäße kein Minimum. Definiere

$$\begin{aligned} T &:= \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in A : \ k > n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} : \ (k \leq n \Longrightarrow k \notin A)\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg(\exists k \in \mathbb{N} : \ (k \leq n \wedge k \in A))\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $0 \in T$: denn wenn $0 \notin T$ wäre, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 0$ und $k \in A$, also $0 \in A$; und dann wäre 0 ein Minimum von A.

Wir zeigen nun

$$(n \in T) \Longrightarrow (n + 1 \in T). \tag{3.4}$$

Daraus folgt dann mit (P3) die Aussage $T = \mathbb{N}$, also $A = \emptyset$.

Um (3.4) zu zeigen, nehmen wir an, es gebe ein $n \in T$ mit $n + 1 \notin T$. Daraus folgt dann $n + 1 \in A$, und aus $n \in T$ folgt mit der Totalität dann, dass $n + 1$ ein Minimum von A ist. Dies ist ein Widerspruch zur obigen Annahme. □

[4]

Bemerkung 3.5. Sei R eine totale Ordnung auf einer Menge M. Wir sagen, R ist eine *Wohlordnung* oder (M, R) ist eine *wohlgeordnete Menge*, wenn jede nicht-leere Teilmenge A ein Minimum besitzt. Die letzte Proposition besagt also, dass $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet ist. Hingegen ist $(\mathbb{R}, \leq)$ nicht wohlgeordnet. Man kann aber zeigen:

Zu jeder Menge M gibt es eine Wohlordnung auf M.

Diese Aussage ist zum Auswahlaxiom äquivalent, wenn wir die übrigen Axiome der Mengenlehre annehmen.

[4]Alternativer Beweis: Wir nehmen an, A besitze kein Minimum. Zu zeigen ist, dass A die leere Menge ist. Wir zeigen induktiv die Aussage

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \{0, 1, 2, \ldots, n\} \cap A = \emptyset,$$

woraus die Aussage folgt.
Induktionsanfang: Angenommen 0 wäre in A. Dann ist 0 das Minimum. Da es aber kein Minimum in A gibt, folgt $0 \notin A$, also $P(0)$.
Induktionsschritt: Es gelte $P(n)$. Falls $n + 1 \in A$, so ist $n + 1$ ein Minimum von A. Da es aber kein Minimum gibt, gilt $n + 1 \notin A$, und somit $P(n + 1)$. □

ANHANG Z

Überblick über algebraische Strukturen

(Aa) **Addition ist assoziativ.**
Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(An) **Addition hat neutrales Element.**
Es gibt ein Element $0 \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

Man nennt 0 das *neutrale Element der Addition*.

(Ai) **Addition hat inverse Elemente.**
Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in X$, so dass

$$x + y = y + x = 0.$$

Man nennt y das Inverse von x bezüglich der Addition und schreibt normalerweise $-x$ anstelle von y.

(Ak) **Addition ist kommutativ.**
Für alle $x, y \in X$ gilt

$$x + y = y + x.$$

(Ma) **Multiplikation ist assoziativ.**
Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(Mn) **Multiplikation hat neutrales Element.**
Es gibt ein Element $1 \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Man nennt 1 das *neutrale Element der Multiplikation*.

(Mi) **Multiplikation hat inverse Elemente.**
Zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in X$, so dass

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Man nennt y das Inverse von x bezüglich der Multiplikation und schreibt normalerweise x^{-1} anstelle von y.

(Mk) **Multiplikation ist kommutativ.**
Für alle $x, y \in X$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(AMd) **Addition und Multiplikation erfüllen das Distributionsgesetz.**
Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (y+z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann, J. Escher, Analysis I, Birkhäuser
[2] H. Amann, J. Escher, Analysis II, Birkhäuser
[3] H. Amann, J. Escher, Analysis III, Birkhäuser
[4] H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter
[5] G. Aumann, O. Haupt, Einführung in die reelle Analysis, de Gruyter
[6] M. Barner, F. Flohr, Analysis I, de Gruyter
[7] M. Barner, F. Flohr, Analysis II, de Gruyter
[8] C. Blatter, Analysis 1, Springer
[9] T. Bröcker, Analysis I, Spektrum
[10] T. Bröcker, Analysis II, BI Wissenschaftsverlag
[11] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw Hill
[12] O. Deiser, Einführung in die Mengenlehre, Springer
[13] H.D. Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, BI Wissenschaftsverlag
[14] O. Forster, Analysis 1, Vieweg Studium
[15] O. Forster, Analysis 2, Vieweg Studium
[16] O. Forster, Analysis 3, Vieweg Studium
[17] U. Friedrichsdorf, A. Prestel, Mengenlehre für den Mathematiker, Vieweg Studium
[18] D. Grieser, Analysis I, Spriger Studium Mathematik
[19] D. Grieser, Vorlesungsskript Analysis I, Universität Oldenburg
[20] P. R. Halmos, Naive Mengenlehre, Vandenhoeck und Ruprecht
[21] S. Hildebrandt, Analysis I, Springer
[22] K. Königsberger, Analysis 1, Springer
[23] K. Königsberger, Analysis 2, Springer
[24] S. Lang, Real and functional analysis, Springer
[25] C. Löh, Vorlesungsskript Analysis I, Universität Regensburg
[26] C. Löh, Vorlesungsskript Analysis II, Universität Regensburg
[27] A. Peyerimhoff, Gewöhnliche Differentialgleichungen I und II, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden
[28] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Third edition, Springer
[29] B. v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer
[30] W. Rudin, Analysis, Oldenbourg
[31] W. Rudin, Reelle und komplexe Analysis, Oldenbourg
[32] L. A. Steen, J. A. Seebach, Counterexamples in Topology
[33] W. Walter, Analysis 1, Springer
[34] W. Walter, Analysis 2, Springer
[35] W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer

Stichworte

Symbole