Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 1

Abgabe bis Freitag, 26.4.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ziel der Aufgabe ist, $f \in \mathcal{R}[0,1]$ zu beweisen.

(a) Warum können Sätze 3.1 und 4.4 aus Kapitel 6 der Analysis I nicht angewendet werden, um diese Aussage zu beweisen?

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in (0,1)$ die Funktion $f_{|_{[\delta,1]}}$ auf $[\delta,1]$ Riemann-integrierbar ist.

(c) Leiten Sie daraus her, dass $f \in \mathcal{R}[0,1]$ gilt.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe des Aufgabenteils (b) *Treppenfunktionen* g_u, g_o *auf* $[0,1]$ *mit* $g_u \leq f \leq g_o$ *und* $\int_0^1 (g_o - g_u)(x)\,dx \leq 3\delta$.

Aufgabe 2. Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie:

(a) Ist f konvex und differenzierbar, so gilt $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$ für alle $x < y$ aus $\mathbb{R}$.
Hinweis auf einen möglichen Lösungsweg: Zeigen und nutzen Sie

$$f'(x) \cdot (y-x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t}.$$

(b) Ist f konvex und zweimal differenzierbar, so gilt $f'' \geq 0$.

(c) Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $g(0) = g(1) = 0$ sowie $g'' \geq 0$, so gilt $g \leq 0$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $g(x_0) = \max\{g([0;1])\} > 0$ *für ein* $x_0 \in [0,1]$ *gilt. Zeigen Sie dann, dass* $g'(x) \geq 0$ *für* $x \in [x_0, 1]$ *und* $g'(x) \leq 0$ *für* $x \in [0, x_0]$. *Nutzen Sie dann die Folgerungen aus den Mittelwertsätzen der Vorlesung.*

(d) Ist f zweimal differenzierbar mit $f'' \geq 0$, so ist f konvex.