Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 2

Abgabe bis Freitag den 3.5.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $N \subset M$ abgeschlossen genau dann, wenn für alle N-wertigen Folgen, die in (M, d) konvergieren, der Grenzwert in N liegt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)* Sei N eine Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d) und sei $\widetilde{d}$ die induzierte Metrik auf N (vergleiche Kapitel 4, Beispiel 5.3).

(a) Ist $(N, \widetilde{d})$ vollständig, so ist N abgeschlossen in M.

(b) Ist (M, d) vollständig, so gilt

$$(N, \widetilde{d}) \text{ vollständig } \Leftrightarrow N \text{ abgeschlossen in } M.$$

Aufgabe 3. *(1+1+2 Punkte)* Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x),$$

für $x \in (-1, 1]$.

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.5 der Vorlesung an.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2},$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

jeweils auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ und auf $(-1, 1)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{k^2}}\right)$$

stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.