Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag 10.05.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := (1 + nx)^{-2}$. Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und untersuchen Sie die Folge auf gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 2. *(1+2+1 Punkte)* Für einen metrischen Raum (X, d) und Teilmenge $A \subset X$, bezeichne mit $H(A)$ die Menge aller Häufungspunkte von A. Bestimmen Sie $H(A)$ für $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und folgende Teilmengen:

i)

$$A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

(ii)

$$A := \{a_k | k \in \mathbb{N}\} \text{ mit } a_k := \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} (-1)^n.$$

(iii)

$$A := \left\{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 3. *(1+1+1+1 Punkte)* Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ungleichung $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{p} + \frac{x^q}{q} - x$ zweimal differenzierbar und konvex ist; berechnen Sie $f(1), f'(1)$ und leiten Sie daraus her, dass $f \geq 0$ gilt. Folgern Sie die gewünschte Ungleichung.

(b) Für $r \in [1, \infty)$ und $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|z\|_r := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_r$ definit und homogen ist.

(c) Seien $x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Aufgabenteils *(a)*, dass $\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq 1$ gilt.

(d) Leiten Sie die *Höldersche Ungleichung* her: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Aufgabe 4. *(1 + 1 + 2 Punkte)* Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

i) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto d(x, -)$ stetig ist.

ii) Für $A, B \subset X$ definieren wir $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) | x \in A,\ y \in B\} \in [0, \infty]$.

a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \operatorname{dist}(\{x\}, A)$ stetig ist.

b) Beweisen Sie: Ist $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$ folgenkompakt und $A \cap K = \emptyset$, so ist $\operatorname{dist}(A, K) > 0$.