Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 4

Abgabe bis Freitag 17.05.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. (*2 + 1 + 1 Punkte*)

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \; f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x+1}$$

eine Kontraktion ist, d.h. dass ein $c \in [0,1)$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \le c\,|x - y|, \text{ für alle } x, y \in [0,\infty).$$

(b) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

(c) Berechnen Sie den Fixpunkt von f.

Aufgabe 2. (*4 Punkte, davon 2 Punkte für Hin- und 2 Punkte für die Rückrichtung*)
Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: $A \subset X$ hat keine Häufungspunkte in X, genau dann, wenn A abgeschlossen ist und jede Teilmenge von A offen ist in A.
Hinweis: in einem Teil der Aufgabe, kann Aufgabe 4 von Übungsblatt 12 der Analysis I hilfreich sein.

Aufgabe 3. (*2+2 Punkte*) Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

(a) für $p = \infty$ vollständig ist,

(b) für $p = 1$ nicht vollständig ist.

Hinweise: Zur Lösung von (a) finden Sie wichtige Hilfsmittel in Kapitel 7. Zur Lösung von (b) kann eine Konstruktion ähnlich zu Kap. 8, Beispiel 1.13 helfen.

Aufgabe 4. (*4 Punkte, davon 1 Punkt für $p = \infty$ und 3 Punkte für $p < \infty$.*)
Zeigen Sie für $1 \le p \le \infty$, dass der normierte Raum $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ vollständig ist. *Hinweis für $p < \infty$: Konstruieren Sie aus einer gegebenen Cauchy-Folge in $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ zunächst eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$, ähnlich wie in Kap. 8, Beispiel 1.10.*