Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag 24.05.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. (*1,5 + 2,5 Punkte*) *a)* Sei A ein nicht zusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(A) = \{0,1\}$.

b) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall ist.

Aufgabe 2. (*1 + 1 + 1 + 1 Punkte*) Sei X ein topologischer Raum, $N \subset X$ eine Teilmenge und $x \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie:

(a) $\mathring{N} = X \setminus \overline{(X \setminus N)}$ und $\overline{N} = X \setminus \overbrace{(X \setminus N)}^{\circ}$.
(b) $x \in \mathring{N} \Leftrightarrow N$ ist eine Umgebung von x.
(c) $x \in \overline{N} \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \varnothing$.
(d) $x \in \partial N \Leftrightarrow$ für alle Umgebungen U von x gilt: $U \cap N \neq \varnothing$ und $U \cap (X \setminus N) \neq \varnothing$.

Hinweis: Es kann nicht mit Folgen argumentiert werden, da wir hier topologische - und nicht nur metrische - Räume betrachten.

Aufgabe 3. (*1 + 1 + 2 Punkte*) Seien X und Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ wird folgendermaßen definiert: eine Teilmenge $U \subset X \times Y$ gehört zu $\mathcal{O}_{X\times Y}$, wenn Familien $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_i)_{i\in I}$ existieren mit $U_i \in \mathcal{O}_X$, $V_i \in \mathcal{O}_Y$ für alle $i \in I$ und $U = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$.

(a) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie eine Topologie auf $X \times Y$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $X \times Y$ ein Hausdorff-Raum ist, sofern X und Y Hausdorff-Räume sind.

(c) Zeigen Sie, dass in dem Fall $X = Y = \mathbb{R}$ (beide versehen mit der Standard-Topologie) die Produkttopologie von $X \times Y$ mit der Standardtopologie von $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt.

Aufgabe 4. (*3 + 1 Punkte*) *i)* Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist X zusammenhängend.

ii) Ist X wegzusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig, für X, Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass dann auch $f(X)$ wegzusammenhängend ist.