Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag 31.05.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)* Sei X ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung.
Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass f abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.)

Aufgabe 2. *(2+1+1 Punkte)* In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ in alle Richtungen differenzierbar ist und berechnen Sie die Richtungsableitungen.

(b) Ist f in $(0,0)$ stetig?

(c) Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

Hinweis: Ein sehr ähnliches Beispiel wird in der Zentralübung besprochen.

Aufgabe 3. *(2 + 2 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so ist der Abschluss von A ebenfalls zusammenhängend.

(b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.

Aufgabe 4. *(1+1+2 Punkte)* Sei X ein topologischer Raum. Definiere die Relation $\sim$ auf $X \times X$ als $x \sim y$ für $x, y \in X$, falls eine zusammenhängende Teilmenge $Z \subset X$ existiert mit $x, y \in Z$. Für $x \in X$ bezeichne die Äquivalenzklasse $[x]$ als *Zusammenhangskomponente* von x in X.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ gilt $C(x) = [x]$, wobei

$$C(x) := \bigcup \{ Z \subset X \,|\, x \in Z \text{ und } Z \text{ zusammenhängend} \} .$$

(c) Zeigen Sie, dass $C(x)$ abgeschlossen ist in X. Ist $C(x)$ offen in X?