

Übungsblatt 7

Abgabe bis Freitag 07.06.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte). (a) Sei $g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)^T$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von g in einem beliebigen Punkt.

(b) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\tilde{f} := f \circ g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Differential von \tilde{f} in Abhängigkeit von partiellen Ableitungen von f .

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte). (a) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ so, dass $\partial_{p, e_1 + e_2} f = 0$ und $\partial_{p, e_2} f = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$ erfüllt sind.

(b) Bestimmen Sie alle zweimal differenzierbaren Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ so, dass $f''(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte). Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom k -ten Grades, d.h., für jedes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ existiere eine Konstante $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: für jedes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ gilt

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) = \alpha_1! \dots \alpha_n! c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}.$$

(b) Leiten Sie daraus her, dass f auf \mathbb{R}^n identisch verschwindet, sobald f auf einer Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^n$ verschwindet.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in U$ ein Punkt. Existiert immer der Grenzwert $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{\|h\|}$?