Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 8

Abgabe bis Freitag 14.06.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(x^2 y)$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene, sternförmige Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung.
Zeigen Sie: ist $f'\colon U \to \mathbb{R}^{k\times n}$ beschränkt, so ist $f(U) \subset \mathbb{R}^k$ auch beschränkt.

Aufgabe 3 (*2 + 2 Punkte*)**.** Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f'(x) = 0$ bzw. $g'(x) = 0$, und bestimmen Sie, in welchem dieser Punkte ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum vorliegt.

i)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \cos(x)\cdot\sin(y).$$

ii)

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \cosh(x)\cdot\sin(y).$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\left|\frac{\partial^3 f}{(\partial x)^{\alpha_1}(\partial y)^{\alpha_2}}(q)\right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $q \in \overline{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 3$.
Zeigen Sie, dass ein Punkt $p \in B_2(0)$ existiert mit $f(p) < -1$.

(Hinweis: Taylor-Formel)