Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann — Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 9

Abgabe bis Freitag 21.06.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*2 + 2 Punkte*)**.** Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ betrachte man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^T A x.$$

(a) Bestimmen Sie alle Punkte x an denen $f'(x) \neq 0$ ist.

(b) Skizzieren Sie die Teilmenge $f^{-1}(\{y\}) \subset \mathbb{R}^2$ im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $y \in \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

Aufgabe 2 (*2 + 2 Punkte*)**.** Seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Wir schreiben $\alpha \le \beta$, falls $\alpha_i \le \beta_i$ für alle $1 \le i \le n$ gilt. Zudem definieren wir

$$\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

für $0 \le \beta \le \alpha$. Hierbei bezeichnet

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} := \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\,(\alpha_i - \beta_i)!}$$

den Binomialkoeffizienten und keinen Vektor in $\mathbb{R}^2$.

(a) Seien $e_1, \dots, e_n$ die Vektoren der Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und alle $1 \le i \le n$ mit $e_i \le \beta \le \alpha$ gilt

$$\binom{\alpha}{\beta - e_i} + \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha + e_i}{\beta}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und alle $|\alpha|$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Leibniz Formel

$$D^\alpha (uv)|_x = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta u|_x)(D^{\alpha-\beta} v|_x),$$

wobei über alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta \le \alpha$ summiert wird.

Hinweis: Verwenden Sie *(a)*.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)**.** Untersuchen Sie Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z)^T \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)**.** In dieser Aufgabe betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y)^T \mapsto \left(\frac{x^3 y}{3}, -x + y\right)^T.$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, die eine Umgebung U besitzen so, dass $f_{|U}\colon U \to f(U)$ bijektiv ist und ein differenzierbares Inverses hat.