Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann   Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 11

Abgabe bis Freitag 5.7.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ betrachte man die Funktion

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^T A x - 1.$$

Nach Aufgabe 1 auf Übungsblatt 9 wissen wir, dass $M := F^{-1}(\{0\})$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ ist.

Berechnen Sie T_pM für $p \in M$.

Aufgabe 2 (*2 + 2 Punkte*)**.** Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untermannigfaltigkeiten sind:

(a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } (x^2+y^2 = 1 \text{ und } x \geq 0)\}$.

(b) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2xy = 0\}$.

Hinweis zu (a): Wenn M eine Untermanngfaltigkeit ist, dann gibt es eine Untermannigfaltigkeitskarte $\Phi : U := B_\epsilon((1,0)^T) \to V$ mit V offen in $\mathbb{R}^2$. Zählen Sie die Zusammenhangskomponenten von $M \cap U$ und von $M \cap U \setminus \{(1,0)^T\}$ und vergleichen Sie dies mit dem Bild unter Φ.

Hinweis zu einer alternativen Lösung von (a): Zeigen Sie zunächst: Sei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten in einer Untermannigfaltigkeit M, $p := \lim p_i \in M$. Sei $v_i \in T_{p_i}M$ und es existiere $v := \lim v_i$. Dann gilt $v \in T_pM$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)**.** Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f: S^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto x^4+y^4+z^4$.

Hinweis: Verwenden Sie lokale Parametrisierungen $\Psi : W \to \mathbb{R}^3$ von S^2 und bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f \circ \Psi$.

Aufgabe 4 (*2+2 Punkte*)**.** Für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine glatte Funktion $f: I \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die Abbildung

$$\Psi: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f(x)\cos(y) \\ f(x)\sin(y) \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $S := \Psi(I \times \mathbb{R})$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie in jedem Punkt $p = \Psi(x,y) \in S$ eine Basis des Tangentialraumes T_pS.