Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Übungsblatt 12

Abgabe bis Freitag 12.7.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)**.** Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^T Ax.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren: die stationären Punkte von f sind genau die Eigenvektoren mit Norm 1 von A.

(b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $f(S^{n-1})$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)**.** Wir betrachten die Funktion $p\colon \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$. Bestimmen und klassifizieren Sie die Extrempunkte dieser Funktion.

Aufgabe 3 (*2 + 2 Punkte*)**.** *(a)* Es sei I ein offenes Intervall mit $t_0 \in I$ und es seien $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + b(t),\ t \in I,\\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, die durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right) b(s)\,ds.$$

$t \in I$, gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung zu folgender Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + t^2,\ y(1) = 2.$$

Aufgabe 4 (*2 + 2 Punkte*)**.** Für ein $R \in (0,1)$ betrachten wir $f\colon \mathbb{T}_R \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x$, wobei

$$\mathbb{T}_R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 + z^2 = R^2\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Bestimmen Sie, welche dieser stationären Punkte lokale Minima und Maxima von f sind.