Analysis II

Universität Regensburg, SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann　　Übungsleitung: Dr. Karsten Bohlen

Bonus Übungsblatt 14

Abgabe bis Freitag 26.7.2019 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (*2+2 Punkte*)**.** *a)* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -36t \\ -2e^t \end{pmatrix}, \; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*2 + 2 Punkte*)**.** *a)* Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ und $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sind $\varphi^1, \cdots, \varphi^n\colon I \to \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$, so sei

$$\Phi(t) := (\varphi_j^k(t))_{1\le j,k\le n} = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Sind $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ linear unabhängig, so ist die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \; x(t_0) = \eta$, gegeben durch

$$x(t) = \Phi(t)\left[(\Phi(t_0))^{-1}\eta + \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} b(s)\, ds \right].$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $A(t)\Phi(t) = \Phi'(t)$ gilt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; x\left(\frac{1}{\pi}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; t > 0.$$

Hinweis: $\varphi^1(t) = (\sin(1/t), \cos(1/t))$, $\varphi^2(t) = (-\cos(1/t), \sin(1/t))$ ist ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Aufgabe 3 (Staatsexamen für das Lehramt, *2 + 2 Punkte*)**.** Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten:

1) $y(0) = 1$.
2) $y(0) = -1$.

Quelle: Diese Aufgabe stammt aus einem Analysis-Staatsexamen für das gymnasiale Lehramt

Aufgabe 4 (Staatsexamen für das Lehramt, *1 + 3 Punkte*)**.** Bestimmen Sie die maximalen Lösungen des Anfangswertproblems $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ mit $f\colon D \to \mathbb{R}^n$.

(i) $D = \mathbb{R}^2,\ x' = t^2x^2,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z'(t) = \frac{i}{z(t)^3},\ z(\frac{1}{3}) = -i$.

Quelle: Teil (i) stammt aus einem Analysis-Staatsexamen für das gymnasiale Lehramt, Teil (ii) wurde in veränderter Form übernommen.