Musterlösung zum 4. Übungsblatt, Aufgabe 3b

Analysis II - SoSe 2019

Bernd Ammann

17. Mai 2019

Aufgabe 3
Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

(a) für $p = \infty$ vollständig ist,

(b) für $p = 1$ nicht vollständig ist.

Hinweise: Zur Lösung von (a) finden Sie wichtige Hilfsmittel in Kapitel 7. Zur Lösung von (b) kann eine Konstruktion ähnlich zu Kap. 8, Beispiel 1.13 helfen.
Zu (b): Betrachte die Folge $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ für } x \in [-1,0), \\ nx, \text{ für } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 1, \text{ für } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} .$$

Für $n \geq m$ gilt $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{m}$. Somit ist (f_n) Cauchy-Folge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Angenommen $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ sei Grenzwert der Folge (f_n) in der L^1-Norm. Man rechnet dann nach

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Wegen $f_n(x) = 0$ für $x \leq 0$ gilt

$$\|f|_{[-1,0]}\|_1 = \int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$$

und somit verschwindet die L^1-Norm von $f|_{[-1,0]}$, somit ist $f(x) = 0$ für $x \leq 0$.

Für jedes $\epsilon > 0$ rechnet man ähnlich

$$\int_\epsilon^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Und man nutzt nun $f_n(x) = 1$ für $x \geq \epsilon$ und $n > 1/\epsilon$. Wir erhalten

$$\|1 - f|_{[\epsilon,1]}\|_1 = \int_\epsilon^1 |1 - f(x)|\, dx = \int_\epsilon^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0.$$

Deswegen erhält man ähnlich wie oben $f(x) = 1$ für $x \geq \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, haben wir also $f(x) = 1$ für alle $x > 0$.
Wir haben also gezeigt: Wenn es ein $f \in C^0([-1, 1])$ als Grenzwert gibt, dann muss gelten $f(x) = 0$ für $x \in [-1, 0)$ und $f(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$. Dies legt f aber bereits eindeutig fest und diese Funktion ist nicht stetig. Wir haben somit einen Widerspruch gegen die Existenz von f.