Musterlösung zum 14. Übungsblatt

Analysis II - SoSe 2019

Karsten Bohlen

30. Juli 2019

1. Aufgabe *a)* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.
(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -36t \\ -2e^t \end{pmatrix}, \ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir bestimmen *die Basis der jeweiligen Lösungsräume für Teil* (i) *und* (ii). **(i)**

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$
$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$$

Hauptraum zu $\lambda_1 = 3$:

$$H_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker(A - 3I) = \operatorname{span}\left\{ w := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basisvektor:

$$\varphi^w(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptraum zu $\lambda_2 = -1$:

$$H_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I)^{\alpha_2} = \ker(A + I)^2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: w^{(1)}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: w^{(2)} \right\}$$

Wir haben $\ker(A + I)^2 = \ker(A + I)$.
Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \varphi^{w^{(1)}}(t) &= e^{t\lambda_2} \sum_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_2 I_3)^k w^{(1)} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \end{aligned}$$

$$\varphi^{w^{(2)}}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda - 2) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2 \\ &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \end{aligned}$$

Zu $\lambda_1 = 3$:

$$\ker(A - 3I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\varphi_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = -2$:

$$\ker(A+2I) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\varphi_2(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_3 = 2$:

$$\ker(A-2I) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\varphi_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{gathered} \det(A-\lambda I) = (\lambda-2)(\lambda-3) \\ \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \ker(A-2I) &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ \ker(A-3I) &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{2t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) &= e^{3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p_1\varphi_1(0) + p_2\varphi_2(0) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \\
&\Rightarrow p_1 = 6, p_2 = -4
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= p_1\varphi_1(t) + p_2\varphi_2(t) \\
&= e^{2t}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -e^{2t}3 + e^{3t}4 \\ e^{2t}6 - e^{3t}4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe
a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I,\ \eta \in \mathbb{R}^n$ und $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sind $\varphi^1, \cdots, \varphi^n\colon I \to \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$, so sei

$$
\Phi(t) := (\varphi_j^k(t))_{1\le j,k\le n} = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}.
$$

Zeigen Sie: Sind $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ linear unabhängig, so ist die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = A(t)x(t) + b(t),\ x(t_0) = \eta$, gegeben durch

$$
x(t) = \Phi(t)\left[(\Phi(t_0))^{-1}\eta + \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1}b(s)\,ds\right].
$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $A(t)\Phi(t) = \Phi'(t)$ gilt.
b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix},\ x\left(\frac{1}{\pi}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ t > 0.
$$

Hinweis: $\varphi^1(t) = (\sin(1/t), \cos(1/t)),\ \varphi^2(t) = (-\cos(1/t), \sin(1/t))$ ist ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.
Lösung: *a)*

$$
\begin{aligned}
\Phi(t) &= (\varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t)) = (\varphi_j^k(t))_{1\le j,k\le n} \\
\Rightarrow A\Phi(t) &= (A\varphi^1(t), \cdots, A\varphi^n(t)) \\
&= (\varphi^{1'}(t), \cdots, \varphi^{n'}(t)) \\
&= \Phi'(t)
\end{aligned}
$$

Sei $\Phi_h(t)$ ein Fundamentalsystem für das gilt $\Phi_h(t_0) = I_n$ (Einheitsmatrix).

$$\begin{aligned} \Phi_h'(t) &= A(t)\Phi_h(t), \Phi_h(t_0) = I_n \\ \varphi(t) &= \Phi_h(t)\eta \Leftrightarrow \varphi'(t) = A\varphi(t), \varphi(t_0) = \eta \end{aligned}$$

Nach **Proposition 6.12** ist die Lösung des AWP gegeben durch:

$$x(t) = \Phi_h(t)\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi_h(t)\Phi_h(s)^{-1}b(s)\,ds$$

$\Phi_h(t)\eta$ ist Lösung der homogenen Gleichung mit AW η, zweiter Summand Lösung der inhomogenen Gleichung mit AW 0.
Es gilt:

$$\Phi(t) = \Phi_h(t)\Phi(t_0)$$

Denn:

$$\Phi_h(t_0)\Phi(t_0) = I\Phi(t_0) = \Phi(t_0)$$

Damit ist:

$$\Phi(t)^{-1} = \Phi(t_0)^{-1}\Phi_h(t)^{-1}$$

Somit:

$$\Phi_h(t)\Phi_h(s)^{-1} = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$$

Eingesetzt in Lösungsformel ergibt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)\,ds \\ &= \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

b) Die Vektoren:

$$\begin{aligned} \varphi^1(t) &= \left(\sin\left(\tfrac{1}{t}\right),\quad \cos\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)^T \\ \varphi^2(t) &= \left(-\cos\left(\tfrac{1}{t}\right),\quad \sin\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)^T \end{aligned}$$

bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & 0 \end{bmatrix} \varphi(t)$$

Lineare Unabhängigkeit: $t_0 = \frac{1}{\pi}$

$$\varphi^1\left(\frac{1}{\pi}\right) = \begin{pmatrix}0, & -1\end{pmatrix}^T$$
$$\varphi^2\left(\frac{1}{\pi}\right) = \begin{pmatrix}1, & 0\end{pmatrix}^T$$

Die Vektoren sind offenbar linear unabhängig.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi^{1\prime}(t) &= \begin{pmatrix}-\frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}, & \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t^2}\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & 0\end{bmatrix}\varphi^1(t)\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}\varphi^{2\prime}(t) &= \begin{pmatrix}-\frac{\sin(\frac{1}{t})}{t^2} & -\frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & 0\end{bmatrix}\varphi^2(t)\end{aligned}$$

Lösung des homogenen AWP:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{\pi}\right) &= \begin{pmatrix}2 \\ -3\end{pmatrix} = p_1\varphi^1(1/\pi) + p_2\varphi^2(1/\pi) \\ &= p_1\begin{pmatrix}0 \\ -1\end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \\ \Rightarrow p_1 &= 3, p_2 = 2 \\ \Rightarrow \varphi(t) &= \begin{pmatrix}3\sin\left(\frac{1}{t}\right), & 3\cos\left(\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix}-2\cos\left(\frac{1}{t}\right), & 2\sin\left(\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix}3\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ 3\cos\left(\frac{1}{t}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sei $\Phi(t)$ die dazugehörige Fundamentalmatrix, dann gilt:

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{bmatrix}\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ -\cos\left(\frac{1}{t}\right) & \sin\left(\frac{1}{t}\right)\end{bmatrix}$$

Somit:

$$\begin{aligned}c(t) &= \int_{\frac{1}{\pi}}^{t}\Phi(s)^{-1}b(s)\,ds = \begin{pmatrix}\int_{\frac{1}{\pi}}^{t}\frac{\sin(\frac{1}{s})}{s^2}\,ds, & \int_{\frac{1}{\pi}}^{t}-\frac{\cos(\frac{1}{s})}{s^2}\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{1}{t}\right) + 1, & \sin\left(\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}^T\end{aligned}$$

$$x_p(t) = \Phi(t)c(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_p(1/\pi) = 0$$

Lösung des AWP:

$$\begin{aligned} x(t) = x_p(t) + \varphi(t) &= \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ 3\cos\left(\frac{1}{t}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ 4\cos\left(\frac{1}{t}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Aufgabe
Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten:
1) $y(0) = 1$.
2) $y(0) = -1$.
Lösung: *Bemerkung:* Man beachte, dass die Differentialgleichung nicht Lipschitzstetig in den Punkten 1 und -1 ist, obwohl die konstanten Funktionen 1 und -1 jeweils die Differentialgleichung lösen.
1) Eine Lösung zu $y(0) = 1$ ist gegeben durch die Konstante 1. Da eine Lösung der Differentialgleichung durch 1 nach oben beschränkt ist, gilt für alle Lösungen y stets $y \leq 1$. Weiterhin ist jede Lösung y monoton steigend, es folgt also $y \geq 1$. Beide Ungleichungen zusammengefasst liefert als einzige Lösung 1.
2) Die Konstante -1 löst das AWP. Mittels Trennung der Variablen folgt

$$\int_{-1}^{y} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int_0^t 1\, ds$$

die Funktion $y(t) = -\cos(t)$. Diese Funktion löst aber nicht das gegebene AWP, denn sie erfüllt die Monotonieeigenschaft nicht. Verlässt eine Lösung den Funktionswert -1, so ist ihr Verlauf lokal gleich cos. Erreicht sie den Funktionswert 1, so läuft sie aus gleichen Gründen wie bei Teil *1)* konstant weiter. Alle Lösungen sind somit gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} -1, \text{ für } 0 \leq t \leq a, \\ -\cos(t-a), \text{ für } a \leq t < t + \frac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ für } t \geq t + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Aufgabe
Bestimmen Sie die maximalen Lösungen des Anfangswertproblems $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$ mit $f\colon D \to \mathbb{R}^n$.

(i) $D = \mathbb{R}^2,\ x' = t^2 x^2,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$
(ii) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z'(t) = \frac{i}{z(t)^3},\ z(\frac{1}{3}) = -i.$
Lösung: **(i)**

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s^2}\, ds &= \int_0^t t^2\, dt \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} &= \frac{t^3}{3} \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

Maximales Lösungsinvervall:

$$I = \left(-\infty, \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{x_0}} \right)$$

(ii)
Wir haben

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(z(t))^3 = i \\ &\Rightarrow z(t)^3 = 3it + c. \end{aligned}$$

Wegen $z(1/3) = -i$ folgt

$$i = z\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3i\frac{1}{3} + c \Rightarrow c = 0.$$

Wir erhalten die Lösung

$$z(t) = -3^{\frac{1}{3}} i t^{\frac{1}{3}}.$$

Da die Lösung zwar auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, jedoch in 0 nicht differenzierbar ist, ist das maximale Existenzintervall gegeben durch $(0, \infty)$.