Klausur zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2019
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Karsten Bohlen
06.08.2019, Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

- Möchten Sie, dass Ihre Note unter Ihrer Matrikelnummer im Grips-System veröffentlicht wird: Ja ☐, Nein ☐. Sie sind dann damit einverstanden, dass alle Hörer(innen) der Vorlesung diese Note sehen können.
- Mobiltelephone sind auszuschalten. Mitgebrachte Taschen sind beiseite zu stellen.
- Sie haben zwei Stunden (d.h. 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten. Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch; sie werden im Laufe der Klausur von den Tutoren kontrolliert.
- Um Unruhe gegen Ende der Bearbeitungszeit zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:30 Uhr oder vor 11:10 Uhr ab.
- Tragen Sie die Lösungen der Aufgaben *ausschließlich in die folgenden Aufgabenblätter* ein. Diese Blätter müssen geheftet bleiben und vollständig bei Klausurende abgegeben werden. Es darf kein eigenes Schreibpapier verwendet werden. Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt. Falls Sie mehr Platz für eine Aufgabe brauchen, können Sie das hinten angefügte Konzeptpapier benutzen und bei der Aufgabe darauf verweisen. Es ist mit blauer oder schwarzer Tinte zu schreiben (Kugelschreiber oder Füller). Bemühen Sie sich um eine leserliche Schrift.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt; insbesondere dürfen Taschenrechner, Vorlesungsmitschrifte, Mobiltelephone, etc. nicht benutzt werden. *Sämtliche* Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur und werden an das Prüfungsamt gemeldet!
- Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben. Insgesamt können 59 Punkte erreicht werden. 23 Punkte sind hinreichend für das Bestehen der Klausur. **Viel Erfolg!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Note:

1. Aufgabe **[7,5+3,5 Punkte]**

a) Bestimmen Sie für jede der Mengen, die in der Tabelle angegeben sind, welche der folgenden Eigenschaften erfüllt sind: offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, zusammenhängend. Die Räume $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^{2n}$ sollen hierbei die Standardtopologie tragen.

Für jede erfüllte Eigenschaft schreiben Sie bitte „J“ in die Tabelle, für jede nicht erfüllte Eigenschaft schreiben Sie „N“. Dabei ist keine Begründung erforderlich. Leere Kästchen werden weder positiv noch negativ gewertet.

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	zusammenhängend
$\left\{x \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, \|x + (3,0,\ldots,0)^T\|_2 < 27\right\}$					
$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) < 0\right\}$					
$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq 0\right\}$					

Bewertung:

$$\frac{\max\{\text{Anzahl der richtigen Antworten } - \text{Anzahl der falschen Antworten}, 0\}}{2}$$

b) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := (x^2+y^2)^2 + xy.$$

Untersuchen Sie die Menge $D := f^{-1}((-\infty,1])$ auf Kompaktheit in $\mathbb{R}^2$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(3,5 Punkte)

2. Aufgabe **[6 Punkte]**

Gegeben ist die Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = x^4 + y^4 - z^2 + 2$. Zeigen Sie, dass $M := F^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von M. Geben Sie eine Basis von $T_{(1,1,2)^T}M$ an.

3. Aufgabe **[6+2+2 Punkte]**

(a) Gegeben sei die Funktion $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 + y^3$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren alle stationären Punkte von f. Geben Sie die Funktionswerte in allen stationären Punkten an. Bestimmen Sie alle Punkte in S^1, in denen f ein globales Maximum oder ein Minimum annimmt.

(b) Sei f wieder wie in (a). Zeigen Sie: Die Funktion $f_{|M}\colon M \to \mathbb{R}$ mit

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1 \;\middle|\; x \geq 0,\; y \geq 0 \right\}$$

aus Teil (a) nimmt ihr globales Maximum und Minimum an.

(c) Bestimmen Sie, ob es sich bei den restlichen stationären Punkten um lokale Extrema handelt, und wenn ja, von welchem Typ sie sind.

Achten Sie bitte, insbesondere bei der Bestimmung globaler Maxima und Minima, auf eine genaue Begründung.

4. Aufgabe **[3 + 3 Punkte]**

(a) Formulieren Sie den lokalen Umkehrsatz in mehreren Veränderlichen.

(b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (\exp(x^2 - y^2), xy)$. Beweisen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ lokal invertierbar ist.

5. Aufgabe **[3+5 Punkte]**

(a) Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen.

(b) Gegeben sei die Gleichung

$$1 - \cos(y) - 2y(x + \cos(x)) = 0.$$

Untersuchen Sie, ob man die Lösungen in einer Umgebung des Punktes $a = (\frac{\pi}{2}, 0)$ als Graph einer Funktion f schreiben kann, wobei f stetig differenzierbar ist.

6. Aufgabe **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = ty^2, \; y(0) = 1.$$

Ist dies (bis auf Restriktion des Definitionsbereichs) die einzige Lösung?

7. Aufgabe **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y' = ty + t.$$

8. Aufgabe **[2+4+4 Punkte]**

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\arcsin\colon (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$.
(Zur Erinnerung: arcsin ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$.)

(b) Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es sei $g\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Für $(t_0, x_0) \in D := \left\{(t,x) \;\middle|\; t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right),\ x(t_0) = x_0. \qquad (*)$$

Zeigen Sie: $x\colon I \to \mathbb{R}$ ist Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ genau dann, wenn $z\colon I \to \mathbb{R}$ mit $z(t) := \frac{x(t)}{t}$ Lösung des Anfangswerproblems

$$z'(t) = \frac{g(z(t)) - z(t)}{t},\ z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \qquad (**)$$

ist.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \sqrt{1 - \frac{x(t)^2}{t^2}},\ x(2) = 1.$$