Klausur zur Analysis II

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Prof. Dr. Bernd Ammann / Dr. Nicolas Ginoux
28.7.2014, Bearbeitungszeit: **3 Stunden**

Name:

Matr.-Num.:

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dieses Blatt und auf jedes zusätzliche Blatt, das Sie abgeben!
- Erlaubtes Hilfsmittel: Nur Kugelschreiber oder Vergleichbares. Kein Bleistift. Keine sonstigen Hilfsmittel.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und packen Sie es weg.
- Wenn Sie mindestens 50% der Punkte erreichen, haben Sie bestanden.
- Um bei einer Rechenaufgabe volle Punktzahl zu erhalten, muss der Rechenweg nachvollziehbar und begründet sein.
- Schreiben Sie auch die Lösungen für die Aufgaben direkt auf diese Klausurblätter. Wenn nötig, können Sie zusätzliche Blätter beifügen.
- Schreiben Sie bitte leserlich.
- Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte											
max. Punktezahl	8	10	12	8	10	8	4	8	4	8	80

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Für U offen in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ und eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

(i) f ist in x_0 in alle Richtungen differenzierbar

(ii) f ist in x_0 partiell differenzierbar

(iii) f ist differenzierbar in x_0

(iv) f ist partiell differenzierbar auf U und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}$ sind stetig

(v) f ist stetig differenzierbar auf U

(vi) f ist zweimal differenzierbar auf U

(vii) f ist zweimal partiell differenzierbar auf U

$(viii)$ f ist zweimal partiell differenzierbar auf U und für alle i, j gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Welche der folgenden Implikationen sind wahr (keine Begründung erforderlich):

(a) $(i) \Longrightarrow (ii)$	(c) $(i) \Longrightarrow (iii)$	(e) $(iv) \Longrightarrow (v)$	(g) $(vi) \Longrightarrow (viii)$
(b) $(ii) \Longrightarrow (i)$	(d) $(iii) \Longrightarrow (ii)$	(f) $(v) \Longrightarrow (iv)$	(h) $(vii) \Longrightarrow (viii)$

Bewertung: $\max\{$*Anzahl der richtigen Antworten* $-$ *Anzahl der falschen Antworten*$, 0\}$

Aufgabe 2 [2+3+2+3=10 Punkte]

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := -(x+y)^3 + 12xy$.

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

(b) Bestimmen Sie für jeden stationären Punkt, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Stattelpunkt von f handelt.

(c) Zeigen Sie, dass $f_{|_{\overline{B}_2(0)}}\colon \overline{B}_2(0) \to \mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass $f_{|_{B_2(0)}}\colon B_2(0) \to \mathbb{R}$ weder ein Maximum noch ein Minimum annimmt.
(Hinweis: berechnen Sie $f(-1,-1) - f(1,1)$.)

Kommentar: Im SS 2014 wurde in der Analysis II das Riemann-Integral behandelt und in Analysis I. Dies führt zu einer gewissen inhaltlichen Verschiebung. Aber es gilt ja sowieso: alle Inhalte der Analysis I sind auch in der Analysis II zu behersschen.

Aufgabe 3 [2+2+2+2+2+2=12 Punkte]

Geben Sie bei jedem Aufgabenteil an, ob das Integral als eigentliches oder uneigentliches Riemann-Integral existiert und ggf. berechnen Sie dieses Integral.

(a) $\int_1^2 (3t^3 + 3t^2 + 5)\,dt$

(b) $\int_0^x e^{3t}\sin(t)\,dt$

(c) $\int_0^x te^{-t}\,dt$

(e) $\int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt$

(f) $\int_1^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt,\ x > 1$

(g) $\int_0^x \frac{e^t}{1-e^{2t}}\,dt,\ x > 0$

Kommentar: Im SS 2014 wurden Intervalle immer in der Art $[a; b]$ notiert.

Aufgabe 4 [2+1+2+1+2=8 Punkte]

(a) Sei $(f_n\colon [-1; 1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen $f\colon [-1; 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Geben Sie einen Satz aus der Vorlesung an, mit dem man unter geeigneten Voraussetzungen schließen kann, dass die Funktion f differenzierbar ist.

Von nun an sei $f_n\colon [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[4]{x^2 + \frac{1}{n}}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie den punktweisen Limes f von $(f_n)_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
(Hinweis: Sie dürfen folgende Ungleichung benutzen: $\sqrt[4]{a+b} \leq \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ für alle $a, b \in [0; \infty)$.)

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n differenzierbar ist.

(e) Konvergiert die Folge $(f_n')_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion g?

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, welche der folgenden Eigenschaften erfüllt sind: offen im $\mathbb{R}^2$, abgeschlossen im $\mathbb{R}^2$, beschränkt im $\mathbb{R}^2$, kompakt, zusammenhängend. Für jede erfüllte Eigenschaft schreiben Sie bitte „J" in die Tabelle, für jede nicht erfüllte Eigenschaft schreiben Sie „N". Dabei ist keine Begründung erforderlich. Leere Kästchen werden weder positiv noch negativ gewertet.

Menge	offen	abgeschlossen	beschränkt	kompakt	zusammenhängend
$B_r(0),\ r>0$					
$\overline{B}_1(0) \cup \{(2,0)^T\}$					
$\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon\ \lvert xy\rvert \geq 1\}$					
$\left\{\left(\frac{1}{n};(-1)^n\right)^T \,\middle\vert\, n \in \mathbb{N}\right\}$					

Bewertung: $\max\left\{\frac{\textit{Anzahl der richtigen Antworten} - \textit{Anzahl der falschen Antworten}}{2}, 0\right\}$

Aufgabe 6 [1+1+2+2+1+1=8 Punkte]

Seien X, Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beantworten Sie ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge U von Y die Teilmenge $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

(b) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist.

(c) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede kompakte Teilmenge A von X die Teilmenge $f(A)$ kompakt ist.

(d) Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn für jede kompakte Teilmenge A von Y die Teilmenge $f^{-1}(A)$ kompakt ist.

(e) Jede Metrik auf X induziert eine Topologie auf X.

(f) Sind d_1 und d_2 verschiedene Metriken auf X, so induzieren sie verschiedene Topologien auf X.

Aufgabe 7 [2+2=4 Punkte]

(a) Formulieren Sie den lokalen Umkehrsatz für Funktionen in mehreren Veränderlichen.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := \left((y+1)e^x, (1+x^2)\sin(y)\right)^T$. Entscheiden Sie, ob der lokale Umkehrsatz für f in der $0 \in \mathbb{R}^2$ anwendbar ist.

Aufgabe 8 [2+2+2+2=8 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen M von $\mathbb{R}^2$ Untermannigfaltigkeiten sind oder nicht. Eine Begründung ist dabei nur dann erforderlich, wenn es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt.

(a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + y^4 = 1\}$.

(b) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$.

(c) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$.

(d) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (2x + y)^3 = 0\}$.

Aufgabe 9 [2+2=4 Punkte]

Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(-x_1, x_2) \in U$ für alle $(x_1, x_2) \in U$ sei

$$f\colon U \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

eine stetig differenzierbare Abbildung so, dass

$$\left.\begin{aligned} f_1(-x_1, x_2) &= -f_1(x_1, x_2) \\ f_2(-x_1, x_2) &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{+}$$

für alle $(x_1, x_2) \in U$ erfüllt ist.

(a) Sei $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2)^T \mapsto (x_1, 1)^T$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ die Bedingung (+) erfüllt. Bestimmen Sie die Integralkurven des Vektorfelds $\tilde{f}$ (inklusive maximales Lösungsintervall) und skizzieren Sie sie.

(b) Sei f eine beliebige C^1-Funktion, die (+) erfüllt. Zeigen Sie: ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, eine Integralkurve von f auf einem offenen Intervall I um die $0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(0) = 0$, so gilt $\varphi_1(t) = 0$ für alle $t \in I$.
(Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie und Picard-Lindelöf)

Aufgabe 10 [2+1+1+4=8 Punkte]

Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(t,x)\mapsto \frac{xt}{\sqrt{2x^2t^2+1}}$.

(a) Zeigen Sie, dass f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $\varphi'(t) = f\big(t,\varphi(t)\big)$ mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit maximalem Lösungsintervall $I = (t_{\min}; t_{\max})$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \in (0;\infty)$ gibt mit $|\varphi(t)-\varphi(s)| \le C\cdot|t-s|$ für alle $t,s\in I$.

(d) Zeigen Sie, dass $t_{\max} = \infty$ gilt.
(Anleitung: nehmen Sie an, dass $t_{\max} < \infty$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (c)*, dass für jede Folge $(t_k)_k$ aus I mit $t_k \nearrow t_{\max}$ die Folge $(\varphi(t_k))_k$ eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie dann, dass $\lim\limits_{t\to t_{\max}} \varphi(t)$ existiert und folgern Sie die Behauptung.*