Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann, Guadalupe Castillo-Solano
Abgabe am 04.05.2020 bis 14:00 Uhr bei Ihrem Tutor

Übungsblatt 3

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ sind:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \cosh(x)\sin(y) \\ x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(Man nennt M das Helikoid oder die Wendelfläche und N das Katenoid).

b) Berechnen Sie in allen Punkten $p \in M$ bzw. $p \in N$ den Tangentialraum T_pM bzw. T_pN.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Wir betrachten die $S^2 = \{(x, y, z)^t \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit der Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2$, gegeben durch

$$(\phi, \vartheta) \mapsto (\cos(\phi)\sin(\vartheta), \sin(\phi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))^t.$$

Auf dem Bild dieser Parametrisierung definieren wir zwei reellwertige Funktionen f, g durch

$$\begin{aligned} f &: (\cos(\phi)\sin(\vartheta), \sin(\phi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))^t \mapsto \phi, \\ g &: (\cos(\phi)\sin(\vartheta), \sin(\phi)\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))^t \mapsto \vartheta. \end{aligned}$$

a) Überprüfen Sie, ob f und g zu stetigen Funktionen auf S^2 fortgesetzt werden können.

b) Überprüfen Sie, ob f und g zu C^∞-Funktionen auf S^2 fortgesetzt werden können.

Beachten Sie hierbei, dass Bild(φ) dicht in S^2 liegt und jede stetige Fortsetzung auf S^2 daher eindeutig ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Wir definieren

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(\psi)(1-\rho\cos(\varphi)) \\ \sin(\psi)(1-\rho\cos(\varphi)) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und $M := \Psi(\mathbb{R}^2)$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.

a) Bestimmen Sie alle Werte von ρ, für die Ψ eine Immersion ist.

b) Bestimmen Sie alle Werte von ρ, für die $\Psi|_{(\alpha,\alpha+2\pi)\times(\beta,\beta+2\pi)}$ eine injektive Immersion ist.

c) Zeigen Sie, dass für alle Werte ρ, die b) erfüllen, $\Psi|_{[\alpha,\alpha+\pi]\times[\beta,\beta+\pi]}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

d) Sei wieder ρ ein Wert, der b) erfüllt. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermanngigfaltigkeit ist, in dem Sie zu jedem Punkt eine Parametrisierung angeben, in dessen Bild dieser Punkt liegt.