Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann
Abgabe bis Montag 15.06.2020 bis 14:00 Uhr in GRIPS

Übungsblatt 9

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Auf $\mathbb{R}^n$ sei eine Äquivalenzrelation durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$ definiert. Beweisen Sie, dass der daraus entstehende Quotientenraum $\mathrm{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ so mit einer glatten Struktur ausgestattet werden kann, dass die kanonische Projektion $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $x \mapsto [x]$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

b) Es sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ so mit einer glatten Struktur (= C^∞-Struktur) ausgestattet werden kann, dass die Abbildung $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, $x \mapsto \mathbb{R} \cdot x$ glatt ist.

Zusatzfragen (3 Bonuspunkte, nicht einfach): Gibt es genau eine solche Struktur in a)? Gibt es genau eine solche Struktur in b)?

2. Aufgabe (4 Punkte)
(Stereographische Projektion)

a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi_\pm : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^2}\begin{pmatrix} 2x \\ \pm(1-\|x\|^2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$$

eine lokale Parametrisierung von S^m ist. Bestimmen Sie auch das Bild von Φ_+ und Φ_-. (Anmerkung: die zugehörigen Karten $(\Phi_\pm)^{-1}$ nennt man stereographische Projektionen. Man vergleiche dazu auch den Absatz „Stereographische Projektion" in Analysis III, Kap. I Abschn. 6.2).

b) Zeigen Sie, dass es eine glatte positive Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gibt, so dass in diesen Koordinaten die Koeffizienten der ersten Fundamentalform durch $g_{ij}(x) = f(x)\delta_{ij}$ gegeben sind. Bestimmen Sie f.

c) Berechnen Sie die Koordinaten-Transformation $(\Phi_-)^{-1} \circ \Phi_+ : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $\mathcal{A} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \mid i \in I\}$ ein Atlas von S^{n-1}, und wir definieren den abgeschlossenen Ball $\overline{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Für $i \in I$ definieren wir $\widetilde{U}_i := \{rx \mid r \in (0,1],\ x \in U_i\}$ und $\widetilde{V}_i := [0,1) \times V_i$

$$\psi_i : \widetilde{U}_i \to \widetilde{V}_i, \quad \psi_i(rx) := ((1-r), \phi_i(x))$$

für $r \in (0,1]$ und $x \in U_i$. Sei $0 \notin I$. Wir definieren $\widetilde{U}_0 := \widetilde{V}_0 := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi_0 := \mathrm{Id}|_{B_1(0)}$.

a) Zeigen Sie:
$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{\widetilde{U}_i \xrightarrow{\psi_i} \widetilde{V}_i \mid i \in I \cup \{0\}\right\}$$
ist ein Atlas mit Rand von $\overline{B}_1$. Die von diesem Atlas induzierte Topologie stimmt mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten überein.

b) Beweisen Sie, dass jeder Atlas mit Rand von $\overline{B}_1$ aus mindestens 2 Karten besteht. Geben Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Atlas mit Rand an, der aus maximal 3 Karten besteht (1 Bonuspunkt, wenn Sie für $n \geq 2$ einen konstruieren, der nur aus 2 Karten besteht, natürliche inklusive benötigter Nachweise).

4. Aufgabe (4 Punkte)
Der abgeschlossene Ball $\overline{B}_1$ in $\mathbb{R}^n$ sei wieder wie in der 3. Aufgabe eine Mannigfaltigkeit mit Rand.

a) Zeigen Sie, dass die obere Hemisphäre $S^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}$ genau eine glatte Struktur trägt, so dass $[0,1) \times S^{n-1} \to S^n_+$, $(t,x) \mapsto (\sqrt{1-t^2}\, x, t)$ und $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to S^n_+$, $y \mapsto (y, \sqrt{1-\|y\|^2})$ Diffeomorphismus auf ihr Bild sind.

b) Sei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten. Ist
$$\pi|_{S^n_+} : S^n_+ \to \overline{B}_1$$
glatt? Ein Homöomorphismus? Ein C^1-Diffeomorphismus? Gibt es einen glatten Diffeomorphismus von S^n_+ nach $\overline{B}_1$?