Studierhinweise zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020

Prof. Dr. Bernd Ammann und Mitarbeiter

Studierhinweise Nr. 10

Weiter in der Mannigfaltigkeitstheorie

Am 29.5. haben wir nun die abstrakte Definition von Mannigfaltigkeiten kennengelernt. Es gab hier einige sehr tiefliegende Aussagen, die hiermit verbunden waren, zum Beispiel die „exotischen Strukturen“ auf S^7 und $\mathbb{R}^4$. Lassen Sie sich nicht verunsichern: diese Fälle sind schwer vorstellbar.

Das Wichtige für Sie ist: Untermannigfaltigkeiten erfüllen alle für Mannigfaltigkeiten geforderten Eigenschaften. Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Verständnis haben: stellen Sie sich immer eine Untermannigfaltigkeit vor; und wenn dies immer noch zu abstrakt ist: eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ oder eine Kurve. Leider sind zwar manche Effekte in diesen kleinen Dimensionen nicht mehr sichtbar, das meiste, was wir aber in den nächsten Wochen betrachten, ist aber schon dann sichtbar.

Wenn Sie diese Vorstellungsschwierigkeiten überwunden haben: dann versuchen Sie bitte die Logik Schritt für Schritt in jedem Schritt sauber argumentiert aufzubauen.

In der Vorlesung am 5.6. und danach müssen wir nun in der allgemeineren Situation wieder für Mannigfaltigkeiten entwickeln, was wir für Untermannigfaltigkeiten schon hatten: zum Beispiel glatte Abbildungen, Tangentialraum, kovariante Ableitung, ein Ersatz für die erste Fundamentalform (die riemannsche Metrik), etc. In den meisten Fällen werden dann Eigenschaften, die wir im Falle von Untermannigfaltigkeiten bewiesen haben, zur definierenden Eigenschaften der zugehörigen Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten. Die Tatsache, dass wir die Definitionen und Aussagen zunächst für Untermannigfaltigkeiten und dann für Mannigfaltigkeiten behandeln, führt also nicht dazu, dass wir alles doppelt machen müssen, sondern dazu, dass Sie verstehen können, wieso man die Definition auf Mannigfaltigkeiten eben so und nicht anders wählt.

Natürlich werden wir auch in vieler Hinsicht nützliche Weiterentwicklungen immer wieder einfügen. Wir führen „Mannigfaltigkeiten mit Rand“ ein, oder auch „Partitionen der Eins“.

Wahrscheinlich werden Sie sich zunächst fragen, wieso man „Partitionen der Eins“ überhaupt braucht. Sie werden sehen: es ist in vielen Beweisen ein ganz entscheidendes Hilfsmittel. Das hat einen tieferen Grund, da wichtige Voraussetzung (abzählbare Basis jeder Zusammenhangskomponente, Glattheit und keine reelle Analytizität) nur über die Partitionen der Eins in den logischen Aufbau der Vorlesung eingehen.