

Studierhinweise Nr. 2

1.2.2 Der Tangentialraum

Die Wiederholung geht weiter. Auch hier ist es wieder empfehlenswert, dies mit dem Skript zu Analysis II zu verbinden. Versuchen Sie einfache Beispiele zu verstehen, wie zum Beispiel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, Ellipsen in \mathbb{R}^2 , oder den Graph von Funktionen etc.), und zwar sowohl formal (also streng logisch) als auch durch eine geometrische Anschauung.

Ist Ihnen schon klar, was dies mit dem lateinischen Wort „tangens“ (=berührend) zu tun hat? In welchem Sinn ist der Tangentialraum berührend? Wenn dies noch nicht klar ist, sollten Sie in Übungen/Zentralübungen nachfragen.

1.3.1 Parametrisierungswechsel

Hier kommt eine Aussage, die Sie wahrscheinlich noch nicht gesehen haben, die aber ganz zentral für das kommende ist. Um die Punkte auf einer Untermannigfaltigkeit zu beschreiben nutzen wir lokalen Parametrisierungen, damit kann man die Untermannigfaltigkeiten für Rechnungen besser zugänglich machen. Dies ist wie, wenn man geeignete Koordinaten einführt, um eine Landschaft zu vermessen. Oder wie wenn man auf dem Erdglobus Längen- und Breitengrad nutzt, um die Koordinaten eines Punktes anzugeben. Nun kommt man aber oft nicht mit einer einzigen lokalen Parametrisierung aus, um die Untermannigfaltigkeit zu beschreiben. Deswegen muss man auf dem Übergang von der einen zur anderen einen Parametrisierungswechsel machen.

1.3.2 C^r -Abbildungen

Nachdem wir unsere Räume kennen, müssen wir nun die passenden Abbildungen zwischen ihnen studieren. So wie lineare Abbildungen zu Vektorräumen passen, stetige Abbildungen zu topologischen Räumen, und Gruppen-Homomorphismen zu Gruppen, so sind glatte Abbildungen die passenden Abbildungen zwischen glatten Untermannigfaltigkeiten. Diese Definition, die uns immer wieder begegnen wird, muss in vielen unterschiedlichen Formen bereitgestellt werden.

Ja, im Moment sind es viele Definition und grundlegende Lemmata; es sieht anstrengend aus, ohne dass man durch „große Sätze“ belohnt wird. Aber halten Sie durch, noch eine weitere Sitzung und dann kann man viele spannende Dinge

machen: Längenmessung, Integration auf Flächen, Flächeninhalte und Volumina von Untermannigfaltigkeiten etc.. Wir legen gerade die Grundlagen dafür, dass wir dann später damit gut arbeiten können.