Studierhinweise Nr. 3

1.3.4 Vektorfelder

Nun ist der Wiederholungsteil definitiv zu Ende und wir schreiten voran. Vektorfelder stellt man sich am besten so vor, dass man sich eine Fläche M in $\mathbb{R}^3$ vorstellt und in jedem Punkt $p \in M$ hängt ein Vektorpfeil X, der an der Fläche M tangential ist (also $X \in T_pM$).

Von besonderer Bedeutung für Rechnungen sind die Koordinatenvektorfelder. Des gilt für Rechnungen in verschiedenem Sinne. Sie sind sowohl wichtig, wenn Sie eine Übungsaufgabe lösen wollen oder etwas beweisen wollen, was wir im folgenden oft tun werden. Sie sind aber auch eine Basis des Tangentialraums, die man benötigt, um mit Computern Rechnung durchzuführen, z.B. wenn man ein elektromagnetisches Feld auf einer gekrümmten Raumzeit numerisch berechnen will, Modelle zum Verschmelzen zweier schwarzer Löcher numerisch berechnen will oder wenn man den Laplace-Operator in Kugel-Koordinaten numerisch erfassen will. Sie sind auch wichtig, damit man die koordinatenabhängige Sprache versteht, die innerhalb der Physik zumeist üblich ist, um Objekte der Allgemeinen Relativitätstheorie zu beschreiben.

1.4 Die Ableitung von Funktionen zwischen Untermannigfaltigkeiten

Nachdem wir nun geklärt haben, was differenzierbare Abbildungen sind, stellt sich die Frage, was denn nun die Ableitung (oder das Differential) denn nun ist. Natürlich wird diese Ableitung eine ganz wichtige Rolle spielen.

Der in der Vorlesung gewählte Zugang hat den Vorteil, dass dass das Differential eng verbunden ist mit den Begriffen, die man aus der Analysis II kennt: man erweitert f lokal zu F, leitet ab, er hält F' und schränkt wieder ein (auf den Tangentialraum). Ich weiß nicht, ob es Bücher gibt, die es auch so machen, dies ist aber der Begriff, der meiner Anschauung entspricht und mit dem man konkrete Berechnungen oft effizient durchführen kann.

1.5 Erste Fundamentalform, Isometrien und Längenmessung

Hier werden erste Schritte gegangen, um die „intrinsische“ Geometrie einer Untermannigfaltigkeit zu studieren. In der intrinsischen Geometrie möchte man Abstände, Winkel, Längen von Kurven, Volumina und vieles mehr innerhalb von Untermannigfaltigkeiten studieren, ohne dass man dazu „den umgebenden Raum betrachtet“. Ein zentrales Ziel der nächsten Vorlesungen ist, zu verstehen, in welchem Sinn man vermeiden kann, „den umgebenden Raum zu betrachten“, aber dennoch von Krümmung reden kann. Dies wird hier vorbereitet.

Historisch war diese intrinsische Sichtweise im 19. Jahrhundert wichtig, um die hyperbolische Ebene zu konstruieren. Es folgte daraus, dass das Parallelenaxiom in Euklids Axiomen der Geometrie nicht aus den anderen Axiomen hergeleitet werden kann, eine Frage, die seit der Antike diskutiert wurde und durch die Konstruktion des hyperbolischen Raums endgültig entschieden wurde. Dies wurde von Riemanns Habilitation stark verallgemeinert und wurde ein wichtiger Baustein der Allgemeinen Relativitätstheorie, diese dazu auch die Motivation im Skript.

Der Begriff „Erste Fundamentalform“ ist ein bisschen aus der Mode gekommen, man könnte hier auch von einer riemannschen Metrik sprechen. Letztendlich ist die Erste Fundamentalform nur eine Einschränkung des Skalarprodukts. Vielleicht fragen Sie sich: zu was muss man so etwas überhaupt einen eigenen Namen geben? Das hat den folgenden Grund: Viel interessanter als die „Erste Fundamentalform“ wird die „Zweite Fundamentalform“ sein, die wir später behandeln werden, und die die extrinsische Krümmung beschreiben wird. Wieso dies die *Zweite* Fundamentalform genannt wird, wird nur deutlich, wenn man schon von der Ersten gehört hat.

Ganz wichtig für Berechnungen und auch für das Verständnis von physikalisch orientierter Literatur (genauer: koordinatenabhängig aufgeschriebener Literatur) sind die zunächst unscheinbaren Funktionen g_{ij}. Wenn Sie das Skript mit Literatur vergleichen, merkt man: die Definition von g_{ij} haben nicht immer denselben Definitionsbereich. Ist $\phi : U \to V$ eine Karte, so sind sie bei uns Funktionen $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$ in vielen Büchern Funktionen $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$. Genauer: dort bezeichnet g_{ij} das, was in unserer Vorlesung mit $g_{ij} \circ \phi$ bezeichnet wird. Lassen Sie sich hiervon nicht verwirren. Mit etwas Erfahrung sollte man später die Sache so sehen: sobald wir mit einer fixierten Karte $\phi : U \to V$ (oder gleichbedeutend: mit einer fixierten Parametrisierung $\Phi : U \to V$) arbeiten, so identifiziert man $p \in U$ mit $\phi(p)$. Dann verschwindet der Unterschied der beiden Definitionen. Dies ist aber eher gesichtspunkt für die Nachbereitung der Vorlesung, nicht für jetzt.

Im Moment müssen Sie vor allem einen Zugang gut verstehen und dies sollte meines Erachtens der in meinem Skript sein.