Studierhinweise zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020

Prof. Dr. Bernd Ammann und Mitarbeiter

Studierhinweise Nr. 5

1.7.1 Tangentialbündel und 1-Jet

Hier werden Tangentialbündel und 1-Jet eingeführt, hauptsächlich, da wir sie in 1.7.2 gut einsetzen können. Gleichzeitig sind es erste Beispiele von Strukturen, die in der Differentialgeometrie sehr wichtig sind. In diesem Abschnitt und in 1.7.3 sind jeweils eine kleine Rechnung als Übungsaufgabe enthalten. Sie wird in der Vorlesung nicht behandelt, sie sollten dies un selbst lösen können.

1.7.2 Ableitung reellwertiger Funktionen und Koordinatenkovektorfelder

Wir führen das zu den Koordinatenvektorfeldern duale Objekt, die Koordinatenvektorkofelder ein, die für Rechnungen sehr hilfreich sind. Sie entstehen durch Ableitung einer Koordinatenfunktion $\phi^i : M \to \mathbb{R}$, wobei $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^m)^T$ eine Karte ist.

1.7.3 Vektorfelder operieren auf Funktionen

Hier diskutieren wir, wie Vektorfelder auf „Funktionen“ operieren. Hierbei sind mit „Funktionen“ spezielle Funktionen gemeint, nämlich glatte Funktionen $M \to \mathbb{R}$. Man interpretiert Vektorfelder Y als eine Derivation $\partial_Y \in \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$. Später werden wir sehen, dass $Y \mapsto \partial_Y$ injektiv ist; und eine avancierter Gesichtspunkt wird dann sein, Tangentialvektoren und Vektorfelder als Derivationen zu definieren.

1.7.4 Kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Hier wird die kovariante Ableitung. Dies ist ein ganz wichtiger Schritt auf dem Weg, die innere Geometrie von Untermannigfaltigkeiten zu verstehen. Wir werden nämlich sehen, dass die kovariante Ableitung unter Isometrien erhalten bleibt, und dies ist eine zunächst sehr erstaunliche Tatsache.

Später werden wir durch mehrfache kovariante Ableitung mathematische Objekte definieren, die die innere Krümmung von Untermannigfaltigkeiten beschreiben.

Die behandelten Eigenschaften 1.67 bilden die Basis dafür, kovariante Ableitungen später auf riemannschen Mannigfaltigkeiten zu definieren. Dies ist ein wichtiges Hilfsmittel für Geometrie und Allgemeine Relativitätstheorie.

Weil dieser Schritt so wichtig ist, wird er noch einen großen Teil der 6. Vorlesung einnehmen, vielleicht sogar die ganze 6. Vorlesung.