Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann, Guadalupe Castillo-Solano
Tutoriumsblatt für die Woche ab 04.05.2020

Tutoriumsblatt 3

1. Aufgabe

a) Bestimmen Sie, welche der folgenden topologischen Räume das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

i) Die Menge aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der diskreten Topologie.

ii) Die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie.

b) Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir das folgende Mengensystem

$$\mathcal{B} := \left\{ \underbrace{(a,b)}_{\text{Intervall}} \times \{c\} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a < b \right\}.$$

i) Zeigen Sie: es gibt eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{O}$ ist. (Was ist hier zu prüfen?)

ii) Erfüllt $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom?

2. Aufgabe

Sei $S^2 = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Die nördliche und südliche Hemisphräre sind definiert als

$$S^2_+ = S^2 \cap \left\{ (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \right\},$$
$$S^2_- = S^2 \cap \left\{ (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0 \right\}.$$

Diese Mengen können als Graphen der Funktionen $f_\pm : (x,y) \mapsto \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ geschrieben werden. Nutzen Sie diese Darstellung, um den Flächeninhalt (d.h. das 2-dimensionale Volumen $\mu^{S^2}(S^2)$) von S^2 zu berechnen.