Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann, Guadalupe Castillo-Solano
Tutoriumsblatt für die Woche ab 18.05.2020

Tutoriumsblatt 5

1. Aufgabe

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir wollen zeigen, dass

$$\partial_X \left(\partial_Y f\right) - \partial_Y \left(\partial_X f\right) = \partial_{\nabla_X Y} f - \partial_{\nabla_Y X} f \tag{1}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $f \in C^\infty(M)$ gilt.

(a) Begründen Sie zunächst Gleichung (1) unter den zusätzlichen Annahmen, dass es eine Karte $\varphi : U \to V$ von M mit $M = U$ gibt und dass X und Y Koordinatenvektorfelder sind.

(b) Zeigen Sie nun Gleichung (1) in allen Fällen, indem Sie die Lokalität von ∂ und ∇ nutzen (wie?) und indem Sie in einer Karte φ die Vektorfelder als

$$X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \qquad Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$$

schreiben.

2. Aufgabe

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit. Der Riemannsche Krümmungstensor ist eine Abbildung $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definiert als

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

Beweisen Sie, dass diese Abbildung $C^\infty(M)$-linear in allen Argumenten ist, d.h. dass

$$R(f \cdot X, Y)Z = R(X, f \cdot Y)Z = R(X,Y)(f \cdot Z) = f \cdot R(X,Y)Z$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

Hinweis zu möglichen Beweisen: Um $R(X,Y)(f \cdot Z) = f \cdot R(X,Y)Z$ kann man entweder die 1. Aufgabe nutzen, oder die Aussage zunächst für Koordinatenvektorfelder X und Y zeigen und dann ähnlich wie in 1.b) vorgehen.