Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann
Tutoriumsblatt für die Woche ab 13.7.2020

Tutoriumsblatt 13

1. Aufgabe

Seien $X \in T_pM$, $\alpha \in \bigwedge^k T_pM$, $\beta \in \bigwedge^\ell T_pM$. Dann gilt

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (X \lrcorner \beta)$$

2. Aufgabe

Sei U offen in $\mathbb{R}^m$ und $\alpha \in \Omega^1(U)$. Sei I ein Intervall und $\gamma : I \to U$ eine glatte Kurve. Wir definieren

$$\int_\gamma \alpha := \int_{[a,b]} \gamma^* \alpha,$$

falls das Integral existiert.

a) Begründen Sie zunächst: Ist γ die orientierungserhaltende Parametrisierung einer orientierten Untermannigfaltigkeit $N = \gamma(I)$ mit Inklusionsabbildung $\iota : N \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt:

$$\int_N \alpha \overset{\text{(def)}}{=} \int_N \iota^* \alpha = \int_\gamma \alpha = \int_\gamma \alpha^\sharp.$$

Das letzte Integral ist ein Integral eines Vektorfelds entlang einer Kurve im Sinne der Analysis III.
Bemerkung: Hierfür ist eigentlich nicht viel zu tun, als die relevanten Aussagen und Definitionen der Vorlesung zu sammeln.

b) Wir definieren nun $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ wie in Beispiel 3.4.3 des Vorlesungsskript, also

$$\alpha := \frac{-x^2 dx^1 + x^1 dx^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geschlossene Kurve. Zeigen Sie

$$\int_\gamma \alpha = 2\pi \mathcal{W}(\gamma, 0),$$

wobei $\mathcal{W}(\gamma, 0)$ die Windungszahl aus der Analysis III ist.