Übungen zur Analysis IV

Universität Regensburg, Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bernd Ammann
Tutoriumsblatt für die Woche ab 20.7.2020

Tutoriumsblatt 14

1. Aufgabe

Seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten das Produkt $M \times N$. Dort haben wir mit den üblichen Identifikationen für $p \in M$, $q \in N$

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN$$

a) Zeigen Sie: es gibt eine Orientierung auf $M \times N$, die sogenannte *Produkt-Orientierung*, so dass gilt:
Ist $(b_1, \ldots, b_m)$ eine positiv orientierte Basis von T_pM und $(f_1, \ldots, f_n)$ eine positiv orientierte Basis von T_qN, dann ist $(b_1, \ldots, b_m, f_1, \ldots, f_n)$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(p,q)}(M \times N)$.
Beschreiben Sie diese Orientierung auf verschiedene Arten: als Äquivalenzrelation auf dem Raum aller Basen, als nirgends verschwindende $(n+m)$-Form auf $M \times N$, als nirgends verschwindendes Element von $\Gamma\left(\bigwedge^{n+m} T(M \times N)\right)$.

b) Wenn M und N riemannsche Metriken tragen und $M \times N$ die Produktmetrik. Welche Relation gilt dann zwischen den Volumenformen dvol^M, dvol^N und $\mathrm{dvol}^{M\times N}$?

c) Ist die Abbildung $M \times N \to N \times M$, $(p,q) \mapsto (q,p)$ orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend?

d) Seien nun N eine Mannigfaltigkeiten mit Rand, ansonsten sollen die obigen Voraussetzungen gelten. Wir haben $\partial(M \times N) = M \times \partial N =: Z$. Nun trägt Z zwei Orientierungen: zum einen die als Rand von $M \times N$, das wiederum die Produkt-Orientierung wie in a) trägt. Zum anderen hat ∂N eine Orientierung als Rand von N und daraus erhalten wir die Produkt-Orientierung von $Z = M \times \partial N$. Stimmen diese beiden Orientierungen von Z überein?

Bitte wenden!

2. Aufgabe
Sei $M \neq \emptyset$ eine m-dimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $\alpha \in \Omega^m(M)$ mit $\int_M \alpha = 1$.

b) Die zugehörige deRham Klasse $[\alpha] \in H^m(M)$ ist nicht Null.

Ab jetzt sei M zusammenhängend. Sie dürfen ohne Beweis die wahre Aussage $\dim H^m(M) = 1$ nutzen. Sei N eine weitere zusammenhängende m-dimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit und $\int_N \beta = 1$. Zu einer glatten Abbildung $f : N \to M$ definiere den Abbildungsgrad

$$\deg(f) := \int_N f^*\alpha \in \mathbb{R}$$

c) $\deg(f)$ hängt nicht davon ab, welches α wir wählen – vorausgesetzt $\int_M \alpha = 1$.

d) Zeigen Sie: Sind $f_1, f_2 : N \to M$ homotop, so gilt $\deg(f_1) = \deg(f_2)$.

e) Geben Sie zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ Abbildungen $f_k : S^1 \to S^1$ und $h_k : S^2 \to S^2$ an mit $\deg(f_k) = \deg(h_k) = k$.

Bemerkung: Man kann auch zeigen, dass immer $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ *gilt, dies ist aber nicht Teil der Aufgabe.*