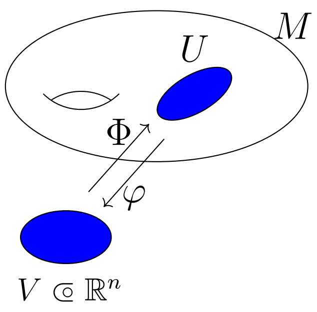
Wiederholungen zu Beginn der Vorlesungenstunden

Analysis IV im SS 2020

Prof. Bernd Ammann

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 28.04.2020:

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit.
Wir beschreiben Untermannigfaltigkeiten durch *lokale Parametrisierungen.*
$\Phi : V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^k$, dies sind Immersionen mit $V \Subset \mathbb{R}^n$ und $U \Subset M$, die gleichzeitg Homöomorphismen sind.



Wir haben geklärt, was es heißt, dass Abbildungen $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar sind und sehen, dass $\varphi := \Phi^{-1} : U \longrightarrow V$ differenzierbar ist. Also sind $\Phi : V \longrightarrow U$ und $\varphi : U \longrightarrow V$ Diffeomorphismen.
Die Abbildung φ nennt man eine Karte.

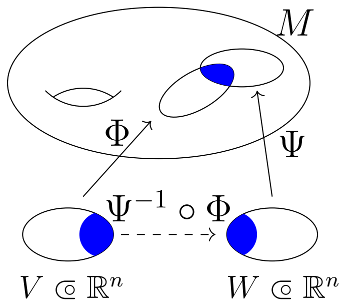
Eine Karte besteht also aus

- einer offenen Teilmenge U von M,
- einer offenen Teilmenge V von $\mathbb{R}^m$ und
- einem Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$.

!ACHTUNG!. *Karten und Untermannigfaltigkeitskarten sind (zunächst) etwas verschiedenes, auch wenn wir beide mit kleinen griechischen Buchstaben φ, ψ,... bezeichnen. Mit den obigen Definition sind Karten auf offenen Teilmengen von M^m definiert und gehen auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$. Untermannigfaltigkeitskarten $\tilde{\varphi}$ sind Diffeomorphismen von einer offenen Menge $W \Subset \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Durch Einschränkung solch einer Untermannigfaltigkeitskarte auf $U := W \cap M$ und durch Identifizierung von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$ erhalten wir aus der Untermannigfaltigkeitskarte $\tilde{\varphi}$ die Karte $\varphi := \tilde{\varphi}|_U : U \longrightarrow V := \tilde{\varphi}(U) \Subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$.*

Dann ist $\Phi := (\varphi)^{-1} = \left(\tilde{\varphi}|_U\right)^{-1} : V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ eine lokale Parametrisierung von M.

Wir haben auch diskutiert, was passiert, wenn wir die lokale Parametrisierung bzw. die Karte wechseln



Kartenwechsel, sind wichtig, denn *fast alles*, was wir im folgenden definieren, konstruieren und zeigen, muss unabhängig von der Karte sein.

Ein Atlas von M ist eine Sammlung von Karten

$$\left\{ U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i \;\middle|\; i \in I \right\},$$

so dass $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

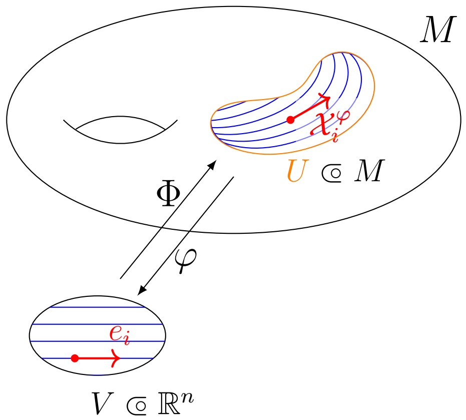
Der Tangentialraum T_pM besteht aus allen Vektoren $X \in \mathbb{R}^k$, so dass

$$\{p + tX \mid t \in \mathbb{R}\}$$

in p an M tangential ist. Wir haben diesen Raum auf verschiedene Arten charakterisiert.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 05.05.2020:

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $\varphi\colon U \longrightarrow V$ eine Karte von M, $p \in M$, $\Phi := \varphi^{-1}$ eine Parametrisierung und $\mathrm{T}_pM \subset \mathbb{R}^k$ der Tangentialraum von M in p.
Wir haben definiert: $\mathcal{X}_i^{\varphi}\big|_p = \Phi'(\varphi(p)) \cdot e_i = (\mathrm{d}_{\varphi(p)}\Phi)(e_i)$.
Die Vektoren $\mathcal{X}_1^{\varphi}\big|_p, \ldots, \mathcal{X}_m^{\varphi}\big|_p$ bilden eine Basis von T_pM.



$$g^M(p) := \langle \bullet, \bullet \rangle\big|_{\mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM} \colon \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M, \qquad p \longmapsto g^M(p) =: g_p^M$$

heißt die **1. Fundamentalform**. Sie hat die **Koordinatendarstellung**:

$$g_{ij}^{\varphi}(x) \;:=\; g^M(\Phi(x))\left(\mathcal{X}_i^{\varphi}\big|_{\Phi(x)}, \mathcal{X}_j^{\varphi}\big|_{\Phi(x)}\right)$$

Bemerkung (Neu!)**.** Kennt man die Funktionen $g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, so kennt man bereits die 1. Fundamentalform. Schreibe dazu $X, Y \in T_pM$ als $X = \sum_{j=1}^m X^j \mathcal{X}_j^{\varphi}|_p$ und $Y = \sum_{k=1}^m Y^k \mathcal{X}_k^{\varphi}|_p$, dann erhält man

$$\begin{aligned} g^M(p)(X,Y) &= \langle \sum_{j=1}^m X^j \mathcal{X}_j^{\varphi}\big|_p, \sum_{k=1}^m Y^k \mathcal{X}_k^{\varphi}\big|_p \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m X^j Y^k \langle \mathcal{X}_j^{\varphi}\big|_p, \mathcal{X}_k^{\varphi}\big|_p \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m X^j Y^k g_{ij}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

Ist $c\colon [a,b] \longrightarrow M$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve, dann definieren wir die **Länge** von c:

$$\mathscr{L}(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}^M(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}\mathrm{d}t$$

Beispiel 1.34. (Längen von Kurven in Koordinaten, Neu!) Sei $\varphi\colon U \longrightarrow V$ eine Karte von einer Untermannigfaltigkeit M^m und $c\colon [a,b] \longrightarrow U$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Definiere

$$\varphi \circ c(t) =: \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \vdots \\ \gamma^m(t) \end{pmatrix}.$$

Dann rechne

$$\mathscr{L}(c) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot c(t), \dot c(t) \rangle} \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(\gamma(t))\, \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t)} \mathrm{d}t.$$

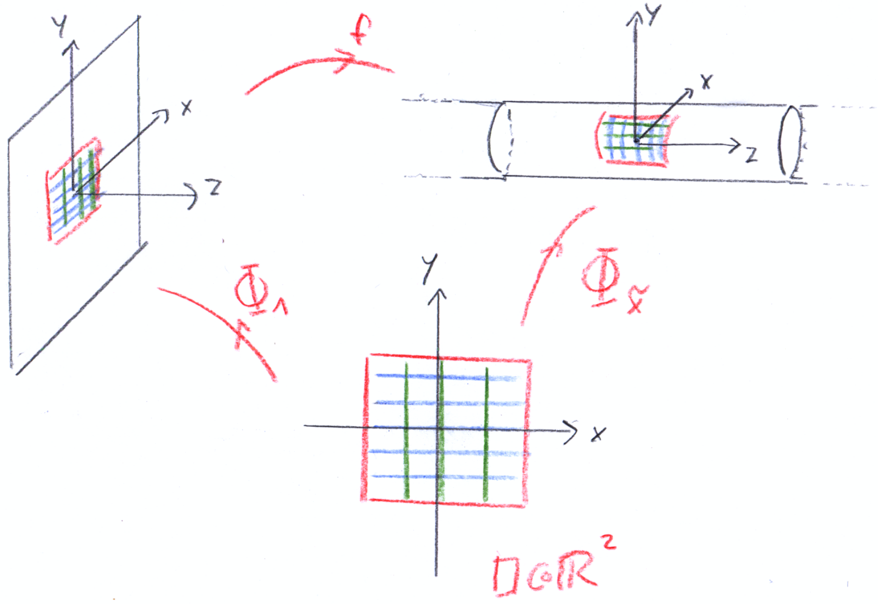
Definition 1.36. *Seien $M^m \subset \mathbb{R}^k, N^n \subset \mathbb{R}^\ell$ Untermannigfaltigkeiten und $f\colon M \longrightarrow N$ sei in $\mathcal{C}^1$. Dann heißt f ein* **lokaler Diffeomorphismus**, *wenn für alle $p \in M$ die Abbildung $\mathrm{d}_p f\colon \mathrm{T}_p M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{f(p)} N$ ein Isomorphismus ist.*

f heißt **isometrisch**, *wenn für alle $p \in M$ das Differential $\mathrm{d}_p f$ isometrisch ist.*
f heißt **lokale Isometrie**, *wenn f isometrisch und lokal ein Diffeomorphismus ist.*
f heißt **Isometrie**, *falls $f\colon M \longrightarrow N$ ein Diffeomorphismus und isometrisch ist.*

Bemerkung. Ist $c\colon [a,b] \longrightarrow M$ eine Kurve, $f\colon M \longrightarrow N$ isometrisch, dann :

$$\mathscr{L}(c) = \mathscr{L}(f \circ c).$$

Beispiel zu lokaler Isometrie: Abbildung 1.15:



Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 08.05.2020:

Seien $v_1, v_2, \dots, v_m$ Vektoren in $\mathbb{R}^k$.
Wir setzen $A := (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_m) \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und definieren das **Parallelepiped** (oder den **Spat**)

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \mid t_i \in [0,1] \right\} = A \cdot [0,1]^m \subset \mathbb{R}^k.$$

Was ist das m-dimensionale Volumen von P?

Fall $m = k$: (Analysis III, Lineare Algebra) $\operatorname{vol}(P) = |\det A|$

Fall $m < k$:
Drehe P, so dass $P \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ dann $\operatorname{vol}(P) = |\det \widehat{A}|$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{A} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$\dagger$}$$

Recht kompliziert!

Alternative:
Gramsche Matrix $G = (g_{ij})_{ij}$ mit $g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$.

Bleibt unter Drehungen bzw. orthonormalen Basistransformationen von $\mathbb{R}^k$ erhalten. Ist A von der Form (†), so haben wir

$$G = A^T \cdot A = \widehat{A}^T \cdot \widehat{A}.$$

$$\det G = (\det \widehat{A})^2$$

Somit $\mathrm{vol}_m(P) = \sqrt{\det G}$.
Also ist $\sqrt{\det(g_{ij})}$ die Volumenvergrößerung der Abbildung

$$\mathbb{R}^m \ni X \longmapsto A \cdot X \in \mathbb{R}^k$$

auf ihr Bild.

Ist $\Phi : V \longrightarrow U$ eine Parametrisierung, dann ist $A := \Phi'$ nicht mehr konstant. Dann ist

$$G = (g_{ij}) := (\Phi')^T \Phi' : V \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$$

die Koordinatendarstellung der 1. FF und

$$\sqrt{\det(g_{ij})} : V \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

ist die Volumenvergrößerungsfunktion.

Wie integriere ich auf Untermannigfaltigkeiten?

Sei $A \subset M$ messbar, M^m Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.
Fall 1: Es gibt eine Karte $\varphi : U \longrightarrow V$ mit $A \subset U$.

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu^M := \int_{\varphi(A)} (f \circ \varphi^{-1}) \underbrace{\sqrt{\det(g_{ij})}}_{\text{Volumenvergrößerungsfunktion}} \, \mathrm{d}\lambda_m$$

Allgemeiner Fall: Schreibe $A = \dot{\bigcup\limits_{j \in J}} A_j$, wobei jedes A_j wie in Fall 1 ist.

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu^M := \sum_{j \in J} \int_{A_j} f \, \mathrm{d}\mu^M.$$

Wir haben gezeigt: Alles ist wohldefiniert, und es gibt ein passendes Maß μ^M.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 12.05.2020:

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit.
Sei $\mathbb{R}^m \supseteq V \xrightarrow{\Phi} U \Subset M$ eine lokale Parametrisierung von M,
$\varphi := \Phi^{-1} : U \longrightarrow V$ eine Karte von M.

Koordinatenvektorfelder

$$\mathcal{X}_i^\varphi|_p := \Phi'\big(\varphi(p)\big) \cdot e_i, \qquad \mathcal{X}_i^\varphi \in \mathscr{X}(U)$$

Koordinatenkovektorfelder

$$\mathrm{d}\varphi^i : U \longrightarrow \bigcup_{p\in U} T_p^* U = \bigcup_{p\in U} T_p^* M$$

$$\mathrm{d}\varphi^i(\mathcal{X}_j^\varphi) = \delta_j^i (:= \delta_{ij})$$

Ableitungen

Für $X \in \mathscr{X}(M)$

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell, \qquad \partial_X f := (\mathrm{d}f)(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

Ist $f = Y$ ein Vektorfeld auf M, d.h. $Y|_p \in T_p M$, dann zerlege

$$(\partial_X Y)|_p = \underbrace{\pi_p^{\mathrm{T}}(\partial_X Y)}_{=:(\nabla_X Y)|_p \in \mathrm{T}_p M} + \underbrace{\pi_p^{\mathrm{N}}\big((\partial_X Y)|_p\big)}_{\in \mathrm{N}_p M}$$

$\nabla_X Y \in \mathscr{X}(M)$ ist die **kovariante Ableitung** von $Y \in \mathscr{X}(M)$ in Richtung $X \in \mathscr{X}(M)$.
Die Koeffizienten der kovarianten Ableitung in einer Karte sind die **Christoffel-Symbole** Γ_{ij}^s

$$\mathfrak{X}(U) \ni \nabla_{\mathcal{X}_i^\varphi} \mathcal{X}_j^\varphi = \sum_{s=1}^m \left(\Gamma_{ij}^s \circ \varphi\right) \mathcal{X}_s^\varphi$$

oder äquivalent

$$\Gamma_{ij}^s\colon V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \Gamma_{ij}^s(x) = \left(\mathrm{d}_{\varphi^{-1}(x)}\varphi^s\right)\left(\nabla_{\mathcal{X}_i^\varphi}\mathcal{X}_j^\varphi\big|_{\varphi^{-1}(x)}\right)$$

Schreibe $X = \sum_{j=1}^m X^j \mathcal{X}_j^\varphi$, $Y = \sum_{j=1}^m Y^j \mathcal{X}_j^\varphi$ und $\nabla_X Y =: Z = \sum_{j=1}^m Z^j \mathcal{X}_j^\varphi$.
Wir haben gezeigt:

$$Z^\ell = \sum_{i=1}^m X^i \left(\partial_{\mathcal{X}_i} Y^\ell\right) + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j (\Gamma_{ij}^\ell \circ \varphi). \tag{1.14-mod}$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 19.05.2020:

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$, $\mathbb{R}^k = \mathrm{T}_pM \oplus \mathrm{N}_pM$.
Seien π_p^{T} bzw. π_p^{N} die Orthogonalprojektionen auf T_pM bzw. N_pM.
Vektorwertige zweite Fundamentalform: Für $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ definiere

$$\vec{\mathrm{II}}_p(X,Y) = \pi_p^{\mathrm{N}}(\partial_{X|_p} Y).$$

$\vec{\mathrm{II}}_p(X,Y)$ hängt nur von $X\big|_p$ und $Y\big|_p$ ab, aber nicht von $X\big|_{M\setminus\{p\}}$ und $Y\big|_{M\setminus\{p\}}$. Somit haben wir eine bilineare Abbildung

$$\vec{\mathrm{II}}_p\colon \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathrm{N}_pM, \qquad \vec{\mathrm{II}}_p \in \mathrm{T}_p^*M \otimes \mathrm{T}_p^*M \otimes \mathrm{N}_pM.$$

$$\vec{H}_p := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \vec{\mathrm{II}}_p(E_i, E_i), \qquad \text{Mittlere-Krümmungs-Normalenfeld}$$

für eine beliebige Orthonormalbasis $E_1, \dots, E_m$ von $\mathrm{T}_p M$.

Interpretationen.

Beweis am kommenden Freitag:

(i) $\vec{H}_p$ zeigt in die Richtung, in der eine Variation der Untermannigfaltigkeit das Volumen verkleinert. Die Norm von $\vec{H}_p$ gibt an, wie sehr es sich verkleinert.

(ii) $\vec{H}_p = 0$ bedeutet: in erster Ordnung bleibt das Volumen unter Variationen konstant.

Bemerkung (2. FF und Geodätische)**.** Sei $c\colon (a,b) \longrightarrow M^m \subset \mathbb{R}^k$ glatt mit $\|\dot{c}\| \equiv 1$. Dann sind äquivalent:

(a) Für alle $t_0 \in (a,b)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $c\big|_{(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)}$ die kürzeste Kurve in M von $c(t_0 - \varepsilon)$ nach $c(t_0 + \epsilon)$ ist.

(b) $\ddot{c}(t) \perp \mathrm{T}_{c(t)} M$ für alle $t \in I$. Das heißt, c ist eine **Geodätische** (vgl. Übungsbl. 6, Aufg. 4).

Insbesondere gilt dann $\ddot{c}(t) = \vec{\mathrm{II}}(\dot{c}, \dot{c})$,
siehe Beispiel 1.89.

Hyperflächen.

Ist $k = m + 1$ und $\nu : M \longrightarrow \mathbb{S}^m$ ein ENF, dann ist

$$\vec{\mathrm{II}}_p(X, Y) = \mathrm{II}_p(X, Y)\nu\big|_p,$$

und es gilt

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = \langle W_p(X), Y\rangle, \qquad W_p(X) := -\partial_{X|_p}\nu.$$

$X \longmapsto W_p(X)$ heißt **Weingartenabbildung**.
$H_p := (1/m)\,\mathrm{tr}\, W_p$ die **mittlere Krümmung**, $\vec{H}_p = H_p\nu\big|_p$.
$m = 2$: $K_p := \det W_p$ ist die **Gauß-Krümmung**.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 22.05.2020:

Für $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ haben wir definiert

$$\vec{\mathrm{II}}(X, Y) := \pi^{\mathrm{N}}(\partial_X Y).$$

Ist $E_1, \ldots E_m$ eine Orthonormalbasis von T_pM, dann

$$\vec{H}_p := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \vec{\mathrm{II}}_p(E_i, E_i) \in \mathrm{N}_pM.$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 26.05.2020:

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^r$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine **Variation** von M ist eine glatte Abbildung

$$F = F_\bullet \colon M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^r, \qquad (p,t) \longmapsto F(p,t) = F_t(p)$$

so dass $F_0 = \mathrm{id}_M$. Der **Träger** $\mathrm{supp}(F_\bullet)$ ist der Abschluss in M der Menge

$$\left\{ p \in M \;\middle|\; F(p,t) \neq p \text{ für ein } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \right\}$$

in M. Das **Variationsfeld** von $F_\bullet$ ist

$$\mathcal{V} \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^r, \qquad q \longmapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F_t(q).$$

Theorem 1.103. *(Variationsformel). Ist $F \colon M^m \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^r$ eine Variation von M mit kompaktem Träger. Dann gilt für jede kompakte Menge $K \supset \mathrm{supp}(F_\bullet)$:*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(F_t(K)) = -m \int_M \left\langle \mathcal{V}, \vec{H} \right\rangle \mathrm{d}\mu^M.$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 05.06.2020:

Definition 2.1 (3).
*Ein m-dimensionaler $\mathcal{C}^k$-***Atlas** *auf M ist* $\mathscr{A} = \left\{ U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \,\middle|\, \alpha \in A \right\}$ *mit*

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *ist eine Überdeckung von M,*

(ii) *für alle $\alpha \in A$ ist $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ offen,*

(iii) *für alle $\alpha \in A$ ist $U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha$ bijektiv,*

(iv) *für alle $\alpha, \beta \in A$ ist $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m$ offen,*

(v) *für alle $\alpha, \beta \in A$ ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ in $\mathcal{C}^k$.*

Bemerkung 2.4, äquiv. zu Def. 2.1 (3). Ist $(M, \mathcal{O}_M)$ bereits ein topologischer Raum, dann ist $\mathscr{A} = \left\{ U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \,\middle|\, \alpha \in A \right\}$ ein m-dimensionaler $\mathcal{C}^k$-**Atlas** auf M mit $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_A$, wenn gilt

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist eine offene Überdeckung von M,

(ii) für alle $\alpha \in A$ ist $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ offen,

(iii) für alle $\alpha \in A$ ist $U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha$ ein Homöomorphismus

(iv) für alle $\alpha, \beta \in A$ ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ in $\mathcal{C}^k$.

Definition 2.8. *Eine $\mathcal{C}^k$-**Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M, \mathscr{A})$, wobei $\mathscr{A}$ eine $\mathcal{C}^k$-Struktur auf M ist und $(M, \mathcal{O}_{\mathscr{A}})$ ein Hausdorffraum ist, so dass jede Zusammenhangskomponente von $(M, \mathcal{O}_{\mathscr{A}})$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.*

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 12.06.2020:

Definition 2.25. $\mathscr{C}_p := \left\{ c \colon I \longrightarrow M \;\middle|\; 0 \in I,\ I \text{ ein off. Interv., } c(0) = p,\ c \text{ ist } \mathcal{C}^1\text{-Kurve} \right\}$.
*Der **Tangentialraum** von M im Punkte p ist $\mathrm{T}_p M := \mathscr{C}_p / \sim$.*

$$\boxed{\text{Dabei gilt } c_1 \sim c_2 \text{ genau dann, wenn } \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_2).}$$

$\sim$ hängt nicht von der Karte ab.

Lemma 2.27. *Die Definition*
$\mathrm{d}_p\varphi\colon \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad [c] \longmapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(\varphi \circ c)$
liefert eine wohldefinierte und bijektive Abbildung.

Definition 2.30. *Seien $M \xrightarrow{f} N$ in $\mathcal{C}^1$. Das* **Differential***/die* **Ableitung** *von f in p ist*

$$\mathrm{d}_pf\colon \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathrm{T}_{f(p)}N, \qquad [c] \longmapsto [f \circ c].$$

Lemma 2.31. *Die Abbildung d_pf in Definition 2.30 ist wohldefiniert und linear.*

Am 9.6. bereits bewiesen: Wohldefiniertheit.

Bemerkung. Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^\ell$, $p \in M$ und $\mathrm{T}_pM \subset \mathbb{R}^\ell$ der Tangentialraum im Sinne von Kapitel 1, $\mathrm{T}_pM = \mathscr{C}_p/\sim$ wie oben.
Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_pM &\longrightarrow \mathrm{T}_pM \\ [c] &\longmapsto \dot{c}(0) \end{aligned}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 16.06.2020:

Verschiedene Zugänge zur Einführung des Tangentialraums.

1. Elementare Zugänge (Analysis II).

Sei $M \subset \mathbb{R}^\ell$ eine Untermannigfaltigkeit.

$$\begin{aligned} T_pM \; := \; & \{v \in \mathbb{R}^\ell \,|\, \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und } c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \text{ ist } \mathcal{C}^1\text{-Kurve mit} \\ & c((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M, c(0) = p \text{ und } c'(0) = v\} \subset \mathbb{R}^\ell. \end{aligned}$$

Andere elementare Charakterisierungen siehe Proposition 1.15 bzw. Analysis II.
$\oplus$ Sehr anschaulich. $\ominus$ Nur für Untermannigfaltigkeiten.

2. Äquivalenzklassen von Kurven.

$\mathscr{C}_p := \big\{c\colon I \longrightarrow M \;\big|\; 0 \in I,\, I \text{ ein offenes Intervall, } c(0) = p,\, c \text{ ist } \mathcal{C}^1\text{-Kurve}\big\}$.
$\mathrm{T}_pM := \mathscr{C}_p/\sim$.

$\oplus$ für beliebige Mannigfaltigkeiten. $\oplus$ anschaulich nahe am 1. Zugang

$\ominus$ Notation von Koordinatenvektorfelder als partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ unpassend.

$\ominus$ Unterscheidung von X und ∂_X wirkt manchmal unnatürlich.

3. Als Derivationen.

$p \in M$: Eine **Derivation** in p ist eine lineare Abbildung $D\colon \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g).$$

$\mathrm{T}_pM :=$ {Derivationen in p}.

$\oplus$ für beliebige Mannigfaltigkeiten. $\oplus$ Manches ist einfacher, zB Lie-Klammer.

$\oplus$ Verallgemeinerung von $\mathcal{C}^\infty(M)$ auf nicht-kommutative Algebren ($\rightsquigarrow$ Quantifizierung der Raumzeit)

$\ominus$ etwas unanschaulicher

Äquivalenzklassen von Kurven $\rightsquigarrow$ Derivationen.

$$\underbrace{X}_{\substack{\text{Äquiv.klasse}\\ \text{von Kurven}}} \longmapsto \underbrace{\partial_X}_{\text{Derivation}}$$

Von nun an identifizieren wir $X \in T_pM$ mit ∂_X.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 23.06.2020:

Eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g), wobei

- M eine Mannigfaltigkeit ist
- $g = (g_p)_{p\in M}$, so dass $g_p : \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist, das glatt von p abhängt.

Wie definiert man „...hängt glatt von p ab"?

Abstrakte Definition:

$$M \longrightarrow \dot{\bigcup_{p\in M}} T_p^*M \otimes T_p^*M \text{ ist eine glatte Abbildung}$$

Dazu äquivalente konkrete Definition:

in allen Karten sind die g_{ij} glatt.

Ziel für heute: Wir wollen nun viele Definition und Aussagen von Untermannigfaltigkeiten mit 1. Fundamentalform auf riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen und interessante Beispiele sehen.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 26.06.2020:

Hyperbolische Ebene

$D := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$g_p^{\text{hyp}}(X,Y) := \frac{4}{(1-\|p\|^2)^2}\langle X,Y\rangle \quad X,Y \in \mathrm{T}_pD$$

- Die Geodätischen (=lokal Abstand minimierende Kurven) haben die Rolle der (affinen) Gerade in der Ebene. Die Geodätischen sind von der Form $D \cap K$, wobei K entweder ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist, der oder die den Rand $S^1 = \partial D$ in zwei Punkten senkrecht schneidet.
- Durch je zwei verschiedene Punkte $p, q \in D$ gibt es genau eine Gerade.

Verbindet man Punkte p_1 mit p_2, p_2 mit p_3, ... und p_k mit p_1 durch Teilstücke endlicher Länge von Geodätische, so erhalten wir ein geodätisches k-Gon.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 30.06.2020:

$$\alpha \in \bigwedge^k \mathrm{T}_p^*M \iff \alpha\colon \underbrace{\mathrm{T}_pM \times \ldots \times \mathrm{T}_pM}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ alternierend, multi-lin.}$$

$$\bigwedge^{\star} \mathrm{T}_p^*M := \oplus_{k=0}^m \bigwedge^k \mathrm{T}_p^*M \text{ ein Vektorraum}$$

$$\bigwedge^k \mathrm{T}^* M := \dot{\bigcup_{p \in M}} \bigwedge^k \mathrm{T}_p^* M \text{ eine Mannigfaltigkeit.}$$

Eine Basis von $\bigwedge^k \mathrm{T}_p^* M$ ist

$$\left(\mathrm{d}_p x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_p x^{i_k}\right)_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k}$$

$$\mathrm{d}_p x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_p x^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \begin{cases} \pm 1 & (j_1, \cdots, j_k) \text{ ist Permutation von } (i_1, \cdots, i_k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 03.07.2020:

3.3 Das äußere Differential

$$\alpha \in \bigwedge^k \mathrm{T}_p^* M \iff \alpha\colon \underbrace{\mathrm{T}_p M \times \ldots \times \mathrm{T}_p M}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ alternierend, multi-lin.}$$

$$\bigwedge^{\star} \mathrm{T}_p^* M := \oplus_{k=0}^m \bigwedge^k \mathrm{T}_p^* M \text{ ein Vektorraum}$$

$$\bigwedge^k \mathrm{T}^* M := \dot{\bigcup_{p \in M}} \bigwedge^k \mathrm{T}_p^* M \text{ eine Mannigfaltigkeit.}$$

Glatte k-Formen: glatte Abbildungen $\omega : M \longrightarrow \wedge^k \mathrm{T}^*M$, $\omega\big|_p \in \wedge^k \mathrm{T}_p^*M$.

Der Raum aller k-Formen: $\Omega^k(M) := \Gamma(\wedge^k T^*M)$.

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

Es gilt $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$.
$\Omega^\star(M) := \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^\star(M)$ und es gilt dann $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 07.07.2020:

3.2 Differentialformen

$$\alpha \in \bigwedge^k \mathrm{T}_p^*M \iff \alpha\colon \underbrace{\mathrm{T}_pM \times \ldots \times \mathrm{T}_pM}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ alternierend, multi-linear}$$

$$\bigwedge^k \mathrm{T}^*M := \dot{\bigcup_{p \in M}} \bigwedge^k \mathrm{T}_p^*M \text{ eine Mannigfaltigkeit.}$$

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\bigwedge^k \mathrm{T}_p^*M) := \left\{\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k \mathrm{T}^*M \text{ glatt.}\right\}$$

3.3 Das äußere Differential

Sei $d_k := d\big|_{\Omega^k(M)} : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_2} \ldots \qquad\qquad \mathrm{d}_k \circ \mathrm{d}_{k-1} = 0$$

$$\omega = f\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

3.4 DeRham-Kohomologie

Kozykel $Z^k(M) := \ker \mathrm{d}_k$.

Korand $B^k(M) := \operatorname{im} \mathrm{d}_{k-1}$.

k-te Kohomologie-Gruppe $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$.

Ziel heute: Methoden zur Berechnung von $H^k(M)$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 10.07.2020:

Zu jeder Mannigfaltigkeit M und $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten with $H^k(M)$.
Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$ ein Isomorphismus.

Definition 3.6.13. *Ein topologischer Raum heißt* **zusammenziehbar**, *falls er homotopieäquivalent zu* $\{p\}$ *ist.*

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 14.07.2020:

3.7.3 Integration von Formen

Eine **Orientierung** auf einer Mannigfaltigkeit M^m ist gegeben durch ein $\omega \in \Omega^m(M)$, so dass $\omega\big|_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

$v_j \in \mathrm{T}_p M$. Dann ist $v_1, \ldots, v_m$ eine positiv orientierte Basis genau dann, wenn $\omega\big|_p(v_1, \ldots, v_m) > 0$.

Definition 3.7.12. *Sei $x\colon U \longrightarrow V$ eine orientierungserhaltende/–umkehrende Karte. Sei $\beta \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger in U. Schreibe $\beta = f \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m$. Dann definiere*

$$\int_U^{[x]} \beta := \pm \int_V (f \circ x^{-1}) \,\mathrm{d}\lambda^m.$$

Lemma 3.7.13. *Die Definition 3.7.12 ist unabhängig von der Wahl der Karte x: Ist $y\colon W \longrightarrow Z$ eine weitere Karte* $\operatorname{supp}(\beta) \subset U \cap W$. *Dann gilt*

$$\int_U^{[x]} \beta = \int_W^{[y]} \beta.$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 17.07.2020:

Satz 3.8.2. *(Stokes) Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beispiel. Sei $M = [0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (x^1, x^2)$. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- f hat kompakten Träger und $\int_{\mathbb{R}} f(x^2)\, \mathrm{d}x^2 = 1$,
- $g(x^1) = 0$ für $x^1 \leq 1$ und $g(x^1) = 1$ für $x^1 \geq 2$,

Setze $\omega := g(x^1) f(x^2)\, \mathrm{d}x^2$.
Dann gilt $\iota^* \omega = 0$, also $\int_{\partial M} \omega = 0$. Ferner haben wir $\mathrm{d}\omega = g'(x^1) f(x^2)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ und dies hat kompakten Träger in $[1, 2] \times \operatorname{supp} f$

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega = \int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} g'(x^1) f(x^2)\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2 = (1-0) \int_{\mathbb{R}} f(x^2)\, \mathrm{d}x^2 = 1.$$

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega = 1 \neq 0 = \int_{\partial([0,\infty)\times\mathbb{R})} \omega.$$

Widerspruch zu Stokes? Nein, denn ω hat Träger $\operatorname{supp}(g) \times \operatorname{supp}(f) \supset [1, \infty) \times \operatorname{supp} f$, und diese Menge ist nicht kompakt.

Sei nun M^m eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Hierfür erhalten wir $\mathrm{dvol}^g \in \Omega^m(M)$.
Ist $e_1, \dots, e_m$ eine positive orientierte Orthonormalbasis von T_pM, so gilt $e_i^* = e_i^\flat$ und $\mathrm{dvol}^g\big|_p = e_1^\flat \wedge \dots \wedge e_m^\flat$.
Zu jedem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gibt es eine Funktion $\mathrm{div}(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$, so dass

$$\mathrm{d}(X \lrcorner\, \mathrm{dvol}^g) = \mathrm{div}(X)\, \mathrm{dvol}^g \tag{$*$}$$

$\mathrm{div}(X)$ heißt **Divergenz** von X.

Wichtiger Spezialfall $M = \mathbb{R}^m$.

$\mathrm{div}(Y) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y^k}{\partial x^k}$

Physikalische Interpretation.

Angenommen X beschreibt die Bewegung von einem Material, sagen wir von Luft.
Dann wird die Luft durch dichter, wo $\mathrm{div}(X) < 0$ und dort dünner, wo $\mathrm{div}(X) > 0$.

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 21.07.2020:

Satz 3.8.2. *(Stokes) Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ist $f : N \longrightarrow M$ glatt und $\alpha \in \Omega^k(M)$, dann gilt

$$\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : N \longrightarrow M$ sind **homotop relativ zu** $A \subset N$, falls es ein $F : [0,1] \times N \longrightarrow M$ gibt mit

- $F(0, \bullet) = f_0$
- $F(1, \bullet) = f_1$
- $\forall p \in A \, \forall t \in [0,1] : \; F(t,p) = f_0(p) = f_1(p)$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am 24.07.2020:

Satz 3.10.1. *(Satz von Gauß–Bonnet, lokale Version) Sei M eine orientierte Fläche mit riemannscher Metrik, $F : P \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus F eines Polygons P (in $\mathbb{R}^2$) auf sein Bild in M. Seien α_j, $1 \leq j \leq k$, die Außenwinkel und sei κ^{geo} die geodätische Krümmung des in positive Richtung durchlaufenen Randes $\partial F(P)$. Dann gilt*

$$\int_{F(P)} K \, \mathrm{d}A + \int_{\partial F(P)} \kappa^{\text{geo}} \, \mathrm{d}\ell + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 2\pi.$$

Orientierung ist grau: nur im Beweis notwendig

Hilfsmittel zu Beweis: $F(P) \subset U \Subset M$. Sei $E \in \mathfrak{X}(U)$ mit $\|E\| \equiv 1$.
Zusammenhangs-1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega(Z) = g(\nabla_Z E, E^{\perp})$$

Am Dienstag gezeigt:

$$-\int_{F(P)} \mathrm{d}\omega + \int_{\gamma} \kappa^{\text{geo}} \, \mathrm{d}\ell + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 2\pi.$$

Wiederholung zu Beginn der Vorlesung am ..2020: