

Conditions au bord auto-adjointes en codimension 2 pour les opérateurs de Dirac

Bernd Ammann Nadine Große²

Universität Regensburg, Allemagne

²Universität Freiburg, Allemagne

Atelier sur la géométrie différentielle et l'analyse globale
Montréal, 24 au 28 mai, 2021



Table de Matière

Le sujet de cet exposé

L'origine du project

Extensions fermées

Répetons les données

Extensions minimales et maximales

Invisibility of N in the case $\alpha \in \mathbb{Z}^\ell$

Some small results

L'espace d'extensions abstrait

Conditions au bord auto-adjointes

L'élément volume normal

Conditions au bord de Portmann-Sok-Solovej

Les espaces modèles en dimension 2

Dimensions plus large : extension et restrictions

La métrique canonique sur le fibré normal

L'opérateur N -Dirac

Les espaces H -check

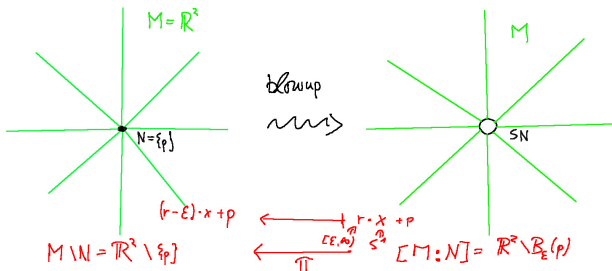
L'espace concret d'extensions \check{H}_α

Résumé et conclusions



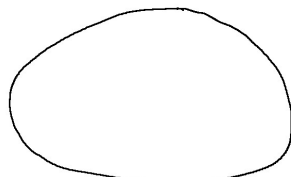
Le sujet de cet exposé

- ▶ Soit (M, g) une variété complète orientée riemannienne. Soit N une sous-variété compacte orientée de codimension k .
- ▶ $[M : N] = (M \setminus N) \cup S_M N$ l'éclatement de M le long de N . Ici $S_M N$ soit le fibré en sphères normales de N dans M , $S_M N = \partial[M : N]$. L'application blow-down : $\pi : [M : N] \rightarrow M$.



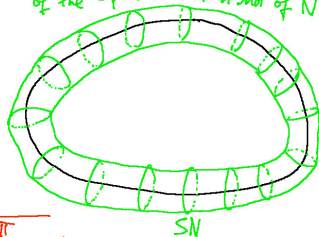
Le sujet de cet exposé. Page 2

Blow up along a circle



$$N \cong S^1 \subset \mathbb{R}^3 = M$$

$[M:N]$ is diffeom. to the complement of the open tubular nbhd of N



$\leftarrow \pi$
maps green to
black

Le pull-back $\hat{g}|_p = (\pi^*g)|_p : T_p[M:N] \otimes T_p[M:N] \rightarrow \mathbb{R}$ est dégénérée le long des fibres de $S_M N \rightarrow N$.

Le sujet de cet exposé. Page 3

- ▶ Nous supposons que $M \setminus N$ est spin. Donc nous avons un fibré vectoriel complexe $\Sigma \rightarrow [M : N]$.
C'est un fibré vectoriel complexe avec une connexion hermitienne et une multiplication parallèle, dite multiplication de Clifford

$$T_p[M : N] \otimes \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p, \quad X \otimes \varphi \mapsto X \cdot \varphi$$

$$X \cdot Y \cdot \varphi + Y \cdot X \cdot \varphi + 2\hat{g}(X, Y)\varphi = 0.$$

Si la structure spinorielle s'étend à M , alors $\Sigma = \pi^*(\Sigma M)$.

- ▶ Soit $L \rightarrow [M : N]$ un fibré en droites hermitiennes avec ∇ , dont la courbure est un pull-back de M .
 $R^\nabla = i\pi^*\alpha, \alpha \in \Gamma(\wedge^2 T^*M)$.
- ▶ $W := \Sigma \otimes L$ un fibré spinoriel généralisé sur $[M : N]$

Les situations plus générales sont possible, mais pas discuté dans cet exposé.

Notre motivation en bref

- ▶ Question par Boris Botvinnik : une meilleure compréhension de certains travaux dans la physique mathématique sera appréciée. Invariants de liens (link invariants) ?
- ▶ J'ai remarqué que les travaux en physique mathématique se généralisent beaucoup.
- ▶ On peut considérer la situation comme un cas special d'un espace "edge" incomplète (Albin & Gell-Redman, (Mazzeo)). Mais nous sommes jamais dans le cadre de la "condition de Witt". Conditions et phénomènes très différentes.
- ▶ Applications importantes possibles.
- ▶ Connexion au travaux de Pierre Albin, Francesco Bei (singularités), Paolo Piazza, donc un bon sujet pour cette conférence.

Exemples avec des codimensions différentes

- ▶ $\dim N = \dim M - 1$: Valeurs au bord classiques.
Si N partage M en deux parties M_1 et M_2 , alors

$$[M : N] = \underbrace{(M_1 \cup N)}_{\bar{M}_1} \amalg \underbrace{(M_2 \cup N)}_{\bar{M}_2}.$$

$\hat{g} := \pi^*g$ non-dégénérée !

- ▶ $\dim N = \dim M - 2$. **Monodromie** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$.

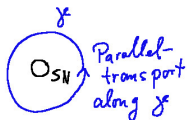
$$N = \prod_{j=1}^{\ell} N_j$$

Transport parallèle dans W autour de N_j soit $e^{2\pi i \alpha_j}$.
 $[\alpha_j] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ne dépend que de j .

- ▶ $\dim N \leq \dim M - 3$.
Alors $L = \pi^*(\mathcal{L})$. Monodromie triviale.
En plus N est **“invisible”**.

Monodromie de l'exemple $M = \mathbb{R}^2 \supset \{0\} = N$

Monodromie around N



Parallel transport in Σ
close to SN is $\pm \text{id}$

Parallel transport in
 L is $e^{2\pi i \hat{\alpha}_j}$, $\hat{\alpha}_j \in \mathbb{R}$
constant along
connected components
of N

$$N = \{p\} \subset \mathbb{R}^2 = M$$

\Rightarrow Parallel transport in $W = \Sigma \otimes L$ is $e^{2\pi i \alpha_j}$, $\alpha_j = \begin{cases} \hat{\alpha}_j \\ \hat{\alpha}_j + \frac{1}{2} \end{cases}$

Exemples principaux

- ▶ Soit M spin. La monodromie vient de L .

Sous-cas principal : L plat. Monodromie $\pi_1(M \setminus N) \rightarrow S^1$.

Sous-cas principal : N est un lien dans S^3 .

$$(S^1)^\ell \ni \exp 2\pi i \alpha \mapsto L_\alpha$$

- ▶ $(M \setminus N) \cup N_j$ est spin. Discussion similaires proche de N_j
- ▶ $(M \setminus N) \cup N_j$ "n'est pas spin",

La monodromie vient de Σ , $\alpha_j = 1/2 \pmod{\mathbb{Z}}$.

Sous-cas principal : $L = \mathbb{C}$

Exemple : $M = \mathbb{C}P^{2r}$, $N = \mathbb{C}P^{2r-1}$.

Fixons $p \in M \setminus N$, on résoud $\not{D}\Psi = \psi_0 \delta_p$ sur $M \setminus N$ avec condition au bord

Une approche simplifiée au théorème de masse positive non-spin. Expectation : si TMP ne serait pas vraie, on obtiendrait une application intéressante

$$S(\Sigma_p) \times \{\text{cond. au bord}\} \rightarrow \{\text{spineurs} \neq 0 \text{ sur } N\}.$$



L'origine du projet

Des travaux en physique mathématique, avec $M = \mathbb{S}^3$ ou $M = \mathbb{R}^3$.

Electrons en interaction avec des champs magnétiques.
L'existence des spineurs harmoniques spin^c donne des enoncés du type

Si notre monde est stable, alors on obtient des bornes inférieures pour $\hbar c/e^2$.

Experiments : $\hbar c/e^2 = 137.03599968 \dots$ Pourquoi ce nombre ?

Quelque littérature en phys. math. (incomplète !)

- ▶ Aharonov & Casher 1978 : description générale
- ▶ Loss & Yau (& Fröhlich) 1986 : premiers exemples de spineurs harmoniques, relation à la “stabilité de matière” et “estimations de $1/\alpha$ (fine structure constant)”
- ▶ László Erdős & Solovej 2001 : progrès important, exemples avec beaucoup de spineurs harmoniques sur S^3
- ▶ Portmann & Sok & Solovej 2015–2018 : plus de détails mathématiques, mais sans utiliser des “fibrés en droites”. Spineurs $S^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ collés le long d’une surface de Seifert.
- ▶ Lieb & Seiringer 2010. Livre “Stability of matter”. Introduction au domaine de recherche “stabilité de matière”.
- ▶ Deng & Wang & Sun & Duan : arxiv cond-mat 1612.01518

mots clés : DNA, supramolecular chemistry, polymers, helium superfluid, spinor Bose-Einstein condensates, quantum chromodynamics, string theory, quantum Hall effects, topological insulators, Faddeev-Skyrme model, Hopfions,

- ▶ Bi & Yan & Lu & Wang Phys. Rev. B 2017 : Nodal-knot semimetals



Ma perspective

- ▶ Boris Botvinnik et Nikolai Saveliev m'ont convaincu de regarder ça.
- ▶ Projet en commun avec Nadine Große : classification d'extensions auto-adjointes dans le style d'article de Bär et Ballmann en codimension 1.
- ▶ Encore beaucoup à faire (contributions appréciées !) : régularité au bord, résolvantes compactes, Fredholm, théorème d'indice,...

Littérature mathématique

Comme déjà dit, on peut interpréter la situation comme un cas spécial d'un espace stratifié avec strata en dimensions m et $m - 2$.

Mais ce cas me semble pas traité :

- ▶ Albin & Gell-Redman 2016 : espaces “edge” incomplètes. Extensions auto-adjointes, Fredholm, théorie d'indice. Mais A&G-R ont besoin d'une condition spectrale, dite “Witt condition” que est satisfait ssi $\alpha \in \mathbb{Z}^\ell$.
- ▶ Mazzeo : travaux A&G-R connectés
- ▶ Leichtnam & Mazzeo & Piazza
- ▶ Brüning
- ▶ Sergiu Moroianu
- ▶ Atiyah & LeBrun

Extensions fermées. Répétons les données.

(travaux avec Nadine Große, Freiburg)

- ▶ N une sous-variété compacte orientée de codimension 2 dans M .
- ▶ $\pi : [M : N] \rightarrow M$ l'éclatement de M le long de N .
 $S_M N = \partial[M : N] = \pi^{-1} N$.
 $\hat{g} = \pi^* g : T_\rho[M : N] \otimes T_\rho[M : N] \rightarrow \mathbb{R}$, dégénéré le long des fibres de $S_M N \rightarrow N$
- ▶ $W \rightarrow [M : N]$ un “bon” fibré spinoriel généralisé pour \hat{g}

$$N = \prod_{j=1}^{\ell} N_j$$

Monodromie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$.

Transport parallèle dans W autour de N_j soit $e^{2\pi i \alpha_j}$.

L'opérateur de Dirac \not{D} associé est un opérateur formellement auto-adjoint d'ordre 1.

Extensions minimales et maximales

$C_c^\infty(\Omega; W) := \{\text{sections de } W \text{ à support compact dans } \Omega\}$
pour $\Omega = [M : N]$ ou $\Omega = M \setminus N$.

L'opérateur de Dirac minimal \mathcal{D}_{\min} est la fermeture de $C_c^\infty(M \setminus N; W)$ par rapport à la norme de graphe

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}}^2 := \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{D}\varphi\|_{L^2}^2.$$

\mathcal{D}_{\min} est symétrique.

$\mathcal{D}_{\max} := \mathcal{D}_{\min}^*$, symétrie implique $\text{dom}(\mathcal{D}_{\min}) \subset \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$.

Notre but: Trouver les domaines \mathcal{D} avec $\text{dom}(\mathcal{D}_{\min}) \subset \mathcal{D} \subset \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ tels que

$$\mathcal{D}_{\max}|_{\mathcal{D}}$$

est auto-adjoint.

The role of $C_c^\infty([M : N]; W)$

Si on regarde les conditions au bord dans le cas de codimension 1, alors $C_c^\infty([M : N]; W)$ est dense dans $\text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$.

Est-ce que ça reste vrai en codimension 2 ?

Non ! $\text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ n'est plus la fermeture de $C_c^\infty([M : N]; W)$.

Problème : $\mathcal{D} : C_c^\infty([M : N]; W) \rightarrow C_c^\infty([M : N]; W)$ n'est pas défini.

Même pire : $\mathcal{D}(\varphi|_{M \setminus N}) \notin L^2$, sauf si φ est parallèle le long des cercles de $S_M N \rightarrow N$.

Est-ce que $C_{c,\parallel}^\infty([M : N]; W)$ est mieux ?

$C_{c,\parallel}^\infty := \overline{\{\varphi \in C_c^\infty([M : N]; W) \mid \varphi \text{ parallel le long des cercles}\}}$

Cas no. 1 : $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$. Un tel φ est nul sur N_j .

$$C_{c,\parallel}^\infty \subset \text{dom}(\mathcal{D}_{\min})$$

(plus précisément : un énoncé local autour de N_j)

Cas no. 2 : $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Alors nous avons

$$\text{dom}(\mathcal{D}_{\max}) = \text{dom}(\mathcal{D}_{\min}),$$

c.à.d. \mathcal{D}_{\min} est auto-adjoint !

Pourquoi ?

Donc : $C_c^\infty(W)$ est “inutile” pour nous !

Le cas $\alpha \in \mathbb{Z}^\ell$

Dans ce cas $W = \pi^*(\mathcal{W})$.

Pour Paolo et Pierre : c'est équivalent à la condition de Witt.

Lemme 1.

Soit M une variété riemannienne complète avec un fibré spinoriel généralisé \mathcal{W} . Soit $H_{\not{D}}^1(M, \mathcal{W})$ la complétion de $C_c^\infty(M, \mathcal{W})$ par rapport à la norme de graphe de \not{D} . Si $N \subset M$ est une sous-variété compacte de codimension ≥ 2 , alors $C_c^\infty(M \setminus N, \mathcal{W})$ est dense dans $H_{\not{D}}^1(M, \mathcal{W})$.

Donc : “ N est **invisible**.”

Lemme 1.

Soit M une variété riemannienne complète avec un fibré spinoriel généralisé \mathcal{W} . Soit $H_{\mathcal{D}}^1(M, \mathcal{W})$ la complétion de $C_c^\infty(M, \mathcal{W})$ par rapport à la norme de graphe de \mathcal{D} . Si $N \subset M$ est une sous-variété compacte de codimension ≥ 2 , alors $C_c^\infty(M \setminus N, \mathcal{W})$ est dense dans $H_{\mathcal{D}}^1(M, \mathcal{W})$.

Démonstration.

Pour simplicité supposons 2.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(M, \mathcal{W})$.

On prend un cut-off logarithmique

$$\chi_{k,\epsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{pour } r(x) \leq e^{-k\epsilon}, \\ \frac{1}{k} \log \frac{r(x) e^k}{\epsilon} & \text{pour } e^{-k\epsilon} \leq r(x) \leq \epsilon, \\ 1 & \text{for } r(x) \geq \epsilon. \end{cases} \quad (1)$$

Alors

$$\|\nabla(\chi_{k,\epsilon}\varphi) - \nabla\varphi\|_{L^2} \leq C(\epsilon + \sqrt{k}). \quad (2)$$

Pour $\epsilon = k^{-1/2} \rightarrow 0$ on a $\chi_{k,\epsilon}\varphi \rightarrow \varphi$ en norme H^1 .

Des petits resultats (sans preuve)

Lemme.

Supposons que $\varphi \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ est borné sur un voisinage de N . Alors $\varphi \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\min})$.

Lemme.

Supposons que la géométrie de g et W est borné, est que \mathcal{D} est coercive à l'infini. Sur $\text{dom}(\mathcal{D}_{\min})$ la norme de graphe pour \mathcal{D} est équivalent à la norme H^1 classique, c.à.d. le norme de graphe pour ∇ .

Lemme.

Pour une section φ de régularité L^1_{loc} de W , définissons $\mathcal{D}\varphi$ dans le sens distributionnel, prenant comme fonctions test les sections lisses de $W^ \otimes \bigwedge^n T^*M$ à support compact. Alors $\text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ est l'espace vectoriel de tous les sections L^1_{loc} de W pour lequel φ et $\mathcal{D}\varphi$ sont dans L^2 .*

L'espace d'extensions abstrait

$$\check{Q} := \frac{\text{dom } \mathcal{D}_{\max}}{\text{dom } \mathcal{D}_{\min}}$$

avec le norme de graphe.

Pour $\varphi, \psi \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ on définit

$$\check{b}([\varphi], [\psi]) := \int_{M \setminus N} \left(\langle \mathcal{D}\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \mathcal{D}\psi \rangle \right) dv^g.$$

C'est une 2-forme bien-définie, non-dégénéré et

anti-hermitienne sur \check{Q} . {cond. au bord auto-adjoints} $\xleftrightarrow{1:1}$

{sous-espaces lagrangiens de (\check{Q}, \check{b}) }

Nos buts:

Identifier cet espace comme les sections de régularité \check{H} d'un fibré vectoriel sur N .

Démontrer que \check{b} est un couplage parfait (un “perfect pairing”).



L'élément volume normal

Si (e_1, e_2) est un repère orthonormal, orienté positivement, du fibré normal $\nu_M N$ à p .

On définit $\omega_{\text{nor}} := e_1 \cdot e_2 \in \text{End}(W_p)$.

On étend cette définition de manière lisse dans un voisinage de N . On peut décomposer en espaces propres pour les valeurs propres $\pm i$ de ω_{nor}

$$W = W_+ \oplus W_-.$$

$$\not{D} = \underbrace{\not{D}^{\text{nor}}}_{\text{odd}} + \underbrace{\partial_r \cdot \not{D}^N}_{\text{even}} + \text{l.o.t.}$$

Conditions au bord de Portmann-Sok-Solovej

On choisit un signe $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ pour tout $j = 1, \dots, \ell$.
Proche de N_j la condition au bord est

$$\mathcal{B} = \{\varphi \in \text{dom}(\not{D}_{\max}) \mid (\omega_{\text{nor}} + i\epsilon_j) \cdot \varphi \in \text{dom}(\not{D}_{\min})\}.$$

Theorem 2 (PSS \approx 2017).

c'est une condition au bord auto-adjointe dans les cas
 $M = \mathbb{S}^3$, N un lien, L plat.

Nous généralisons cet énoncé à la situation générale. Et nous classifions toutes les extensions auto-adjointes.

Continuité en α

Sont les conditions au bord PSS continue en α ?

Les conditions au bord PSS sont

- ▶ continue pour $\epsilon_j \alpha_j \nearrow 0 \pmod{\mathbb{Z}}$,
- ▶ mais non-continue pour $\epsilon_j \alpha_j \searrow 0 \pmod{\mathbb{Z}}$.

Conditions au bord générales

La régularité des espaces \check{H} n'est pas continue en $\alpha_j \equiv 1/2 \pmod{\mathbb{Z}}$

Importance de la continuité

Flût spectrale

Indice de Fredholm non constant pour $\alpha_j \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$.

Les espaces modèles en dimension 2

Supposons $M = \mathbb{C} \ni z$, $N = \{0\}$, $\Sigma = \underline{\mathbb{C}}^2 = \Sigma_+ \oplus \Sigma_-$

L un fibré plat sur $[\mathbb{C} : \{0\}]$, monodromie α .

Alors ω_{nor} est l'élément volume standard.

$$\not{D} = \not{D}^{\text{nor}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial} \\ -\partial & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{z^{-\alpha}}{|z|^{-\alpha}}$ représent une section de L sans zéros.

Ansatz :

$$\Phi_{\beta,\gamma}^+ := \begin{pmatrix} z^\beta \bar{z}^\gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\beta,\gamma}^- := \begin{pmatrix} 0 \\ z^\beta \bar{z}^\gamma \end{pmatrix}.$$

où β et γ sont les nombres réels avec $\beta - \gamma + \alpha \in \mathbb{Z}$.

$\Phi_{\beta,\gamma}^\pm \in L_{\text{loc}}^2$ ssi $\beta + \gamma > -1$

$$\not{D}\Phi_{\beta,\gamma}^+ = -\sqrt{2}\beta\Phi_{\beta-1,\gamma}^-, \quad \not{D}\Phi_{\beta,\gamma}^- = \sqrt{2}\gamma\Phi_{\beta,\gamma-1}^+,$$

Lemme.

La condition $\Phi_{\beta,\gamma}^{\pm} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ est caractérisé comme suivant (“localement proche de 0”).

- (1) Supposons $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. Alors $\Phi_{\beta,\gamma}^{\pm} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ ssi $\beta + \gamma > 0$.
- (2) Supposons $\beta = 0$ et $\gamma \neq 0$. Alors $\Phi_{0,\gamma}^{+} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ ssi $\gamma > -1$, et $\Phi_{0,\gamma}^{-} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ ssi $\gamma > 0$.
- (3) Supposons $\beta \neq 0$ et $\gamma = 0$. Alors $\Phi_{\beta,0}^{+} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ ssi $\beta > 0$, et $\Phi_{\beta,0}^{-} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ ssi $\beta > -1$.
- (4) Supposons $\beta = \gamma = 0$. $\Phi_{0,0}^{\pm} \in \text{dom}(\mathcal{D}_{\max}) = \text{dom}(\mathcal{D}_{\min})$.

$\alpha \in (0, 1)$: Les éléments de $\text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$ sont de la forme

$$\left(\begin{array}{c} \bar{z}^{\alpha-1} \varphi_{+} \\ z^{-\alpha} \varphi_{-} \end{array} \right) + \text{dom}(\mathcal{D}_{\min}).$$

Dimensions plus large : extension et restrictions

Regardons codimension 1.

La restriction $\mathcal{R} : C_c^\infty(M; W) \rightarrow C_c^\infty(\partial M; W)$ s'étend à une application continue, dite “**applications de trace**”,

$$\mathcal{R} : \text{dom}(\mathcal{D}_{\max}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial M; W)$$

May cette application **n'est pas surjective**.

$$\check{H}(\partial M; W) := \mathcal{R}(\text{dom}(\mathcal{D}_{\max})).$$

On décompose

$$C_c^\infty(\partial M; W) = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-.$$

On obtien $\check{H}(\partial M; W)$ par complétion de \mathcal{S}_+ par rapport à la norme $H^{1/2}$ et \mathcal{S}_- par rapport à la norme $H^{-1/2}$.

Il y a une **application d'extension**

$$\mathcal{E} : \check{H}(\partial M; W) \rightarrow \text{dom}(\mathcal{D}_{\max}), \quad \mathcal{R} \circ \mathcal{E} = \text{id}.$$

$$\check{H}(\partial M; W) \cong \check{Q} := \text{dom } \mathcal{D}_{\max} / \text{dom } \mathcal{D}_{\min}$$

Dimensions plus large : extension et restrictions

Alors encore codimension 2.

Idée : une approche analogue en codimension 2 ?

Pour simplicité de présentation, soit N connexe.

Idée : L'application trace est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : \text{dom}(\mathcal{D}_{\max}) &\rightarrow \Gamma(W|_{S_M N}) \\ \varphi &\mapsto \lim_{r \searrow 0} \begin{pmatrix} r^{1-\alpha} & 0 \\ 0 & r^\alpha \end{pmatrix} \varphi|_{\partial U_r(N)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{b}([\varphi], [\psi]) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{M \setminus N} \left(\langle \mathcal{D}\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \mathcal{D}\psi \rangle \right) dv^g \\ &= B(\mathcal{R}(\varphi), \mathcal{R}(\psi))\end{aligned}$$

où $B(\Phi, \Psi) = \int_{S_M N} \langle \Phi, \partial_r \cdot \Psi \rangle d\mu$ et où μ est la mesure S^1 -invariante sur $S_M N$ avec $\pi_* \mu = 2\pi \text{dvol}^N$.

On obtient :

Opérateur d'extension

$$\mathcal{E} : \check{H}_\alpha(W|_{S_M N}) := \text{Image}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$$

Propriétés :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \circ \mathcal{E} &= \text{Id} \\ \check{b}(\varphi, \mathcal{E}(\Psi)) &= B(\mathcal{R}(\varphi), \Psi)\end{aligned}$$

Le couplage \check{b} sur $\check{H}_\alpha(W|_{S_M N})$ est parfait.

Pour déterminer $\check{H}_\alpha(W|_{S_M N})$ on doit considérer

- ▶ S^1 -equivariance
- ▶ régularité le long de N

Equivariance

Soit $\alpha \in (0, 1)$

$S^1 \subset \mathbb{C}$ agit sur le fibré en cercles $S_M N \rightarrow N$:

$\rho : S^1 \rightarrow \text{Diff}(S_M N)$.

Alors $K := d\rho(i)$ est un champ de vecteurs sur $S_M N$.

On définit

$$\Gamma_\alpha(W^+|_{S_M N}) := \{ \Phi \in C^\infty(W^+|_{S_M N}) \text{ avec } \nabla_K \Phi = i(1 - \alpha)\Phi \}$$

$$\Gamma_\alpha(W^-|_{S_M N}) := \{ \Phi \in C^\infty(W^-|_{S_M N}) \text{ avec } \nabla_K \Phi = -i\alpha\Phi \}$$

$$\Gamma_\alpha(W|_{S_M N}) := \Gamma_\alpha(W^+|_{S_M N}) \oplus \Gamma_\alpha(W^-|_{S_M N})$$

$\Gamma_\alpha(W^\pm|_{S_M N})$ est l'espace des sections d'un fibré vectoriel sur N .

Densité et régularité

Pertinence : Soit $\Phi_{\pm} \in \Gamma_{\alpha}(W^{\pm}|_{S_M N})$.

Alors

$$\chi(r) \left(r^{\alpha-1} \Phi_+ + r^{-\alpha} \Phi_- \right) \in \text{dom}(\not{D}_{\max}).$$

Modulo termes d'ordre plus petits et des termes en $\nabla \chi$, c'est dans le noyau de l'opérateur de Dirac normal \not{D}^{nor} .

$\Gamma_{\alpha}(W|_{S_M N})$ est dense dans l'espace d'Hilbert $\check{H}_{\alpha}(W|_{S_M N})$.

Pour expliquer la norme sur cet espace, on discutera

- ▶ La métrique canonique sur le fibré normal, vu comme fibré vectoriel euclidien avec une connexion.
- ▶ L'opérateur N -Dirac
- ▶ Les espaces \check{H}_{α}

La métrique canonique sur le fibré normal

Pour comprendre les conditions au bord en codimension **1**, il faut d'abord étudier les demi-cylindres $N \times [0, \infty)$, qu'on peut voir comme le fibré normal intérieur de $N = \partial M$ dans M .

Si $N \subset M$ est de codimension **k**, on définit la métrique canonique g_{can} sur l'espace total de $\pi : \nu_M N \rightarrow N$ tel que

- ▶ π est une submersion riemannienne,
- ▶ les espaces horizontaux \mathcal{H}_p sont donnés par la connexion sur $\nu_M N \rightarrow N$,
- ▶ pour $V \in \nu_M$ l'espace vertical en V porte la métrique de $\nu_M N|_{\pi(V)}$.

L'opérateur de Dirac \not{D}_0 sur $(\nu_M N, g_{\text{can}})$ donne **l'opérateur model**.

L'opérateur N -Dirac

Les espaces horizontaux définissent une distribution \mathcal{H} de codimension $k - 1$ sur $S_M N$.

Pour une base orthonormée e_1, \dots, e_{m-k} de \mathcal{H}_p et $\varphi \in \Gamma(W|_{S_M N})$ on définit l'opérateur N -Dirac comme

$$\left(\mathcal{D}^N \varphi \right) |_p := - \sum_{j=1}^{m-k} \partial_r \cdot e_j \cdot \nabla_{e_j} \varphi.$$

Lemme.

L'opérateur N -Dirac est un opérateur elliptique, (formellement) auto-adjoint, impair et est du type Dirac sur N , agissant sur $\Gamma_\alpha(W|_{S_M N})$.

Revenons en codimension 2

Sur l'espace model nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 &= \underbrace{\partial_r \cdot \nabla_r + \frac{K}{r} \cdot \nabla_{K/r}}_{\mathcal{D}^{\text{nor}}} + \partial_r \cdot \mathcal{D}^N \\ &= \partial_r \cdot \left(\nabla_r - \omega_{\text{nor}} \cdot \nabla_{K/r} + \mathcal{D}^N \right)\end{aligned}$$

Il faut noter que

$$\begin{aligned}(\nabla_r - \omega_{\text{nor}} \cdot \nabla_{K/r}) (r^{\alpha-1} \varphi_+) &= 0 \\ (\nabla_r - \omega_{\text{nor}} \cdot \nabla_{K/r}) (r^{-\alpha} \varphi_-) &= 0\end{aligned}$$

Idée : Analyser cet eq. diff. ord. dans la décomposition spectrale pour \mathcal{D}^N
Ceci nous donn les espaces \check{H} .

Les espaces \check{H}

Theorème.

Soit $\alpha \in (0, 1)$. On obtient un splitting

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha(W|_{S_M N}) &= V_+ \oplus V_- \\ \check{H}_\alpha(W|_{S_M N}) &= \overline{V_+}^{-H^\beta} \oplus \overline{V_-}^{-H^{-\beta}}\end{aligned}$$

où $\beta := \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$.

Il y a une application de trace surjective

$\mathcal{R} : \text{dom}(\check{D}_{\max}) \rightarrow \check{H}_\alpha(W|_{S_M N})$ avec noyau $\text{dom}(D_{\min})$ et une application d'extension injective $\mathcal{E} : \check{H}_\alpha(W|_{S_M N}) \rightarrow \text{dom}(\check{D}_{\max})$ avec

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{E} = \text{Id}$$

$$\check{b}(\varphi, \mathcal{E}(\Psi)) = B(\mathcal{R}(\varphi), \Psi)$$

B est un couplage parfait sur $\check{H}_\alpha(W|_{S_M N})$.

$V_- := \left\{ \Phi \in \Gamma_\alpha(W|_{S_M N}) \mid \Phi \text{ "s'étend" comme un } L^2\text{-spineur } \check{D}_0\text{-harmonique} \right\}$

Le Ansatz

Attention : \mathcal{D}^N anticommute avec ω_{nor} .

Supposons $\mathcal{D}^N \Phi = \lambda \Phi$, $\Phi = (\Phi_+, \Phi_-)$.

Pour $r \rightarrow \infty$: \mathcal{D}^N est dominant, donc $L^2 \Leftrightarrow \lambda > 0$

For $r \rightarrow 0$: $\nabla_{K/r}$ est dominant

Ansatz

On cherche les solutions asymptotiques á $\exp(-\lambda r)\Phi$

$$\varphi = f_+(r)\Phi_+ + f_-(r)\Phi_-, \quad f = (f_+, f_-)$$

$\mathcal{D}_0 \varphi = 0$ ce traduit en

$$0 = f'(r) + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} f(r) + \lambda f(r)$$

Le développement asymptotique pour $r \rightarrow 0$ des solutions de ce système dépend fortement du signe de $\alpha - \frac{1}{2}$.

L'espace concret d'extensions \check{H}_α

Pour $\alpha \in (0, 1/2)$: pour une section $\Phi = (\Phi_+, \Phi_-)$ de $W|_{S_M N}$

$$\|\Phi\|_{\check{H}}^2 := \|\Phi_+\|_{H^{-\alpha}}^2 + \|\Phi_-\|_{H^\alpha}^2$$

Pour $\alpha \in (1/2, 1)$: Pour une section $\Phi = (\Phi_+, \Phi_-)$ de $W|_{S_M N}$

$$\|\Phi\|_{\check{H}}^2 := \|\Phi_+\|_{H^{1-\alpha}}^2 + \|\Phi_-\|_{H^{\alpha-1}}^2$$

Pour $\alpha = 1/2$: L'espace V_- est engendré par les spineurs propres de \not{D}^N aux valeurs propres positives.

L'application d'extension \mathcal{E}

Sur V_- on résoud le eq. od. diff. en arrière : de $r \rightarrow 0$ à $r \rightarrow \infty$.

$$V_- \rightarrow \text{dom}(\mathcal{D}_{\max})$$

Quoi faire avec V_+ ? (pour simplicité $\alpha \neq 1/2$)

On étend $\Phi \in V_+$ par

$$\mathcal{E}(\Phi) := r^{\beta-1} \exp\left(-|\mathcal{D}^N| r\right) \Phi.$$

Alors $\mathcal{D}_0\varphi \neq 0$, mais la norme L^2 de $\mathcal{D}_0\varphi$ est encore bien contrôlée.

L'application de restriction \mathcal{R}

On la définit comme l'adjoint symplectique de l'application d'extension.

Résumé et conclusions

Pour N connexe, codimension 2

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Z} : \text{dom}(\mathcal{D}_{\max}) = \text{dom}(\mathcal{D}_{\min}) = \text{dom}(\mathcal{D}^M)$
- ▶ Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ les extensions auto-adjointes sont en bijections avec les espaces lagrangiens fermés de \check{H}_α
- ▶ Les conditions au bord PSS positives sont continues pour $\alpha \searrow 0$.
Les conditions au bord PSS negatives sont continues pour $\alpha \nearrow 0$.

Ouvert :

- ▶ propriété de Fredholm
- ▶ flût spectral et relation à l'indice
- ▶ cadre KO-theoretique
- ▶ regarder les invariants des liens associées